

6.4 论文汇报

1 杨云宇婷 含真空的可压缩等熵流体力学方程组的爆破准则

吴老师好, 之前我曾提及博士期间想解决一些爆破准则方向的问题. 厚晓凤老师硕士期间解决一个带真空的液气两相流模型的爆破准则, 周艳老师硕士期间解决了一个不含真空的二维空间中完全可压的NS方程的爆破准则. 因为以上两篇硕士毕业论文中的省略过多, 通过查阅文献, 我看到了山东大学杨云宇婷的硕士毕业论文《含真空的可压缩等熵流体力学方程组的爆破准则》, 她的指导老师是陈明涛老师. 文中有一些关于ns方程的结构推导的细节, 我仔细阅读后, 有以下的认识, 而这些新的认识, 很好的帮助我去理解厚晓凤和周艳老师的论文.

2 可压缩ns方程隐藏的结构

1). 有效粘性通量. 这个概念的提出, 源自Hoff David 1995 的jde、arma 上解决不含真空的弱解的小能量解的全局存在性的这篇论文. 在杨的论文中的第10页的下半页有详细的推导.

2) 物质导数的定义与应用. $\dot{u} = u_t + (u \cdot \nabla)u$

3) 方程的第一个结构: $\rho \dot{u} = \mathbf{L}u - \nabla P$. 以及由这个方程结构而构造的新的能量估计:

$$\int \rho |\dot{u}|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (\mu |\nabla u|^2 + (\lambda + \mu) |\operatorname{div} u|^2) = \int p \partial_t \operatorname{div} u + \int \rho \dot{u} \cdot (u \cdot \nabla) u$$

更多细节在杨的论文的18页.

4) 方程的第二个结构.

$$\begin{aligned} & \rho \partial_t \dot{u} + \rho (u \cdot \nabla) u + \nabla \partial_t P + \operatorname{div}(\nabla P \otimes u) \\ & = \mu [\Delta \partial_t u + \operatorname{div}(\Delta u \otimes u)] + (\lambda + \mu) [\nabla \operatorname{div} \partial_t u + \operatorname{div}((\nabla \operatorname{div}) \otimes u)]. \end{aligned}$$

上述结构的推导在杨的论文的第22页. 上述结构能够用来推导下列能量不等式:

$$\sup \int \rho |\dot{u}|^2 + \int_0^T |\nabla \dot{u}|^2 < \infty.$$

5) 方程的第三个结构: 关于压强函数 $P = A\rho^\gamma$

$$\partial_t P + \operatorname{div}(Pu) = -(\gamma - 1)P \operatorname{div} u.$$

3 关于密度函数在ns方程的爆破准则中的本质作用

厚的论文和周的论文, 以及黄祥娣老师的论文、孙永忠老师的论文等等, 对于密度函数有一个关键的要求.

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,t,L^\infty(\Omega))} < \infty.$$

然而, 我们是否可以改变密度函数的可积性范围呢? 杨的论文通过参考重要文献: [Choe, Hi Jun; Yang, Minsuk Blow up criteria for the compressible Navier-Stokes equations. *Mathematical analysis in fluid mechanics—selected recent results*, 65 - 84, *Contemp. Math*], 从周期域推广到全空间上, 得到一个关键的引理3.1. 这个引理将有力的推广厚、周、黄、孙等作者的相关结果.

引理的主要内容如下:

假设:

$$\sup(\|\nabla u\|_{L^A}) + \|\rho\|_{L^B} + \|\rho^{\frac{1}{C}}u\|_{L^C} < \infty$$

对某些正数 A, B, C, β 满足 $A < B < C$, $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} < \frac{1}{3}$, 以及

$$\frac{(C-1)B}{C-B} \leq \beta,$$

则有

$$\sup \|\rho\|_{L^\infty} < \infty.$$

具体的证明细节在杨的论文的12页.

首先, 这个引理的作用在于改善了密度的可积性. 同时, 要想证明得到 $\sup \|\rho\|_{L^\infty} < \infty$. 这就要求我们在对非线性项的估计时, 使用更加精细的GNS插值不等式, 从而在能量不等式中得到 $\sup(\|\nabla u\|_{L^A}) + \|\rho\|_{L^B} + \|\rho^{\frac{1}{C}}u\|_{L^C} < \infty$. 这也是杨的论文的一个难点.

4 提出问题

1. 在杨的论文的创新点的介绍中, 杨的论文所构建的一个爆破准则, 主要是将文献[Choe, Hi Jun; Yang, Minsuk Blow up criteria for the compressible Navier-Stokes equations. *Mathematical analysis in fluid mechanics—selected recent results*, 65 - 84, *Contemp. Math*]的主要定理从周期域问题改善到柯西问题. 周期域问题有一个显著的优势: 就是满足 Poincaré 不等式, 这将减少柯西问题中精细的GNS插值不等式的使用.

2. 正如上一部分中提出的那样, 我们可以构造类似的引理3.1, 从而改善之前文献中关于密度函数需要 L^∞ -范数有界的条件.

3. 杨的论文中所详细解释的关于方程的隐藏结构的细节, 将有利于我们解决带真空的小能量弱解的全局存在性. 正是带着上述的观察, 2013年, 张剑文老师解决了可压缩MHD方程的带真空的小能量弱解的全局存在性. 2015年又解决了微极流模型的带真空的小能量弱解的全局存在性. 值得一提的是, 2015的微极流模型结果的第一作者正是陈明涛老师. 这些观察也将有利于我们解决其他模型的带真空的小能量弱解的全局存在性.

5 进一步的文献阅读

1). 孙永忠老师和章志飞老师的一本英文专著.

Sun, Yongzhong; Zhang, Zhifei Blow-up criteria of strong solutions and conditional regularity of weak solutions for the compressible Navier-Stokes equations. Handbook of mathematical analysis in mechanics of viscous fluids, 2263 - 2324, Springer, Cham, 2018.

2). 黄祥娣老师的相关论文.

Huang, Xiangdi; Li, Jing; Xin, Zhouping Global well-posedness of classical solutions with large oscillations and vacuum to the three-dimensional isentropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 65 (2012), no. 4, 549 - 585.

Huang, XiangDi; Xin, ZhouPing A blow-up criterion for classical solutions to the compressible Navier-Stokes equations. *Sci. China Math.*

Huang, Xiangdi; Li, Jing; Xin, Zhouping Blowup criterion for viscous barotropic flows with vacuum states. *Comm. Math. Phys.* 301 (2011), no. 1, 23 - 35.

Huang, Xiangdi; Li, Jing; Xin, Zhouping Serrin-type criterion for the three-dimensional viscous compressible flows. *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011), no. 4, 1872 - 1886.

3专著: (mathsci 网站还不能下载, 暂时没能找到这本专著)

Choe, Hi Jun; Yang, Minsuk Blow up criteria for the compressible Navier-Stokes equations. *Mathematical analysis in fluid mechanics—selected recent results*, 65 - 84, *Contemp. Math*