DOI:10.13546/j.cnki.tjyjc.2020.07.005

鞅差序列下非线性半参数测量误差模型的经验似然推断

吕升日,何帮强

(安徽工程大学 数理学院,安徽 芜湖 241000)

摘 要: 文章研究了鞅差误差序列下非线性半参数测量误差回归模型,利用逆卷积的方法得到了非参数的无偏估计,构造了未知参数的经验对数似然比统计量,在测量误差分布为普通光滑分布时,证明了经验对数似然比统计量服从渐近卡方分布,所得结果可以用来构造出未知参数估计量的置信域。

关键词: 鞅差误差序列;非线性半参数模型;逆卷积;经验似然;渐近卡方分布

中图分类号: O212.7　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1002-6487(2020)07-0026-04

0 引言

非线性半参数回归模型既有参数模型的特点,又有非参数模型的特点,结合了非线性函数的优点,突破了线性函数的局限性。考虑如下非线性半参数模型:

$$Y = g(X,\beta) + m(U) + \varepsilon \tag{1}$$

其中,Y 为实值响应变量,$\beta \in R^p$ 为 p 维未知参数向量,X 是 d 维协变量,$g(\cdot,\cdot)$ 为已知的可测函数。U 是取值于 $[0,1]$ 上的随机变量,$m(\cdot)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的光滑未知函数,ε 为随机误差。

关于模型(1),当 $g(X,\beta)=X^{\tau}\beta$ 时,模型(1)是部分线性模型。部分线性模型自首次被Engle等[1]提出以来,学者们就对部分线性模型做了许多的研究与扩充[2-5]。Li和Xue[6],崔恒建[7]以及李晓妍[8]研究了在含有误差变量下部分线性模型的统计推断。当 $g(X,\beta)$ 是 X,β 的非线性函数时,冯三营等[9]通过模拟研究比较了经验似然方法与最小二乘法的优劣。以上文献的研究都是在模型误差是独立的条件下进行的,然而在实际中,大部分数据并不是独立的,特别是对于连续收集的经济数据,其误差具有明显的相依结构。而鞅差结构是一种相对较弱的相依数据结构,在实际中大量存在,并被广泛运用于再保险风险模型、生存分析模型等。Chen等[10]将经验似然方法应用于带有鞅差序列的误差模型中,并将经验似然法与最小二乘法得到的结果进行比较。李国亮和刘禄勤[11]与Fan等[12]分别研究了带有鞅差序列模型中相关估计的强相和性。本文在此基础上研究了当测量误差是协变量 U 时,模型误差为鞅差序列的非线性半参数测量误差模型的经验似然推断。通过一个可估计的辅助随机变量构造了未知参数的经验对数似然比统计量,证明了统计量服从渐近卡方分布,最后给出了未知参数的置信域。

基金项目: 国家社会科学基金一般项目(18BTJ034)

作者简介: 吕升日(1993—),男,安徽黄山人,硕士研究生,研究方向:应用统计。
何帮强(1974—),男,安徽庐江人,博士,副教授,研究方向:经济统计。

A New Method for Optimizing Background Value of Grey Model

Gao Yuanyuan, Wei Yong

(College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan 637009, China)

Abstract: This paper transforms the background value into the original function form after the continuity of the original sequence so as to make the grey differential equation more matched with the albino differential equation. Then, based on the primary fact that the solution of the albino differential equation y(t) is no longer a cumulative function of the original sequence, the paper does not use the traditional successive subtraction method any more, but directly uses the derivative of y(t) to obtain the simulation prediction formula. It is proved by rigorous theory that the model in the paper has the overlap of albinism index, coefficient and translation constant. Therefore, compared with the original NGM (1,1,K) model, the proposed model has the advantage of being applicable to both high and low growth exponential sequences.

Key words: NGM(1,1,K); approximate non-homogeneous exponential series; background value; overlap

1 方法与主要结果

令数据 $\{X_i, Z_i, Y_i\}_{i=1}^{n}$ 是来自 $\{X, Z, Y\}$ 的一组可观测的独立同分布的随机样本，即：

$$\begin{cases} Y_i = g(X_i, \beta) + m(U_i) + \varepsilon_i \\ Z_i = U_i + e_i \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ 是服从均值为0、方差为 σ_e^2 的独立同分布的测量误差。且 e_i 与 $(X_i, U_i, \varepsilon_i)$ 相互独立，$\{\varepsilon_i, F_i, i \ge 1\}$ 是鞅差序列，即 ε_i 在 F_i- 是可测的且 $\mathrm{E}(\varepsilon_i | F_{i-1}) = 0$ 。

首先假设 β 是给定的，模型(1)可以变为下面的非参数回归模型：

$$Y - g(X, \beta) = m(U) + \varepsilon$$

因此若 β 已知，即当 U 可观测时，有 $m(U) = \mathrm{E}(Y - g(X, \beta) | U)$ ，定义 $m(\cdot)$ 的核估计为：

$$\hat{m}(u) = \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{u - U_i}{h}\right)\left(Y_i - g(X_i, \beta)\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{u - U_i}{h}\right)$$

$$\triangleq \sum_{i=1}^{n} W_i(u)\left(Y_i - g(X_i, \beta)\right) \tag{3}$$

其中 $W_i(u) = \frac{1}{nh} K\left(\frac{u - U_i}{h}\right) \Big/ \hat{f}(u)$, $K(\cdot)$ 为已知的核函数，h 是光滑参数。$\hat{f}(u) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u - U_i}{h}\right)$ 为协变量 U 的密度函数 $f(u)$ 的核估计。将式(3)代入式(2)可以得到一个近似残差：

$$\tilde{\varepsilon}_i(\beta) = Y_i - g(X_i, \beta) - \hat{m}(U_i) = \tilde{Y}_i - \tilde{g}(X_i, \beta)$$

其中：

$$\tilde{Y}_i = Y_i - \sum_{j=1}^{n} W_j(U_i) Y_j, \tilde{g}(X_i, \beta) = g(X_i, \beta) - \sum_{j=1}^{n} W_j(U_i) g(X_j, \beta) \tag{4}$$

定义辅助随机变量：

$$\zeta_i(\beta) = \frac{\partial \tilde{g}(X_i, \beta)}{\partial \beta}\left[\tilde{Y}_i - \tilde{g}(X_i, \beta)\right]$$

当 β 是真实参数时，$\mathrm{E}(\zeta_i(\beta)) = 0$ 。由此构造经验对数似然比函数：

$$l_n(\beta) = -2\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\log(np_i) | p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \sum_{i=1}^{n} p_i \zeta_i(\beta) = 0\right\} \tag{5}$$

然而，由于式(4)中 U_i 是不可直接观测的，实际上观测的是 Z_i ，所以 β 的置信域不能直接用 $l_n(\beta)$ 来构造。故而需对 $m(\cdot)$ 进行重新估计，结合Fan和Truong[13]逆卷积的方法，得到 $m(\cdot)$ 的估计：

$$m_n(u) \triangleq m_n(u, \beta) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(u)\left(Y_i - g(X_i, \beta)\right)$$

其中 $W_{ni}(\cdot) \triangleq \frac{1}{nh} K_n\left(\frac{\cdot - Z_j}{h_n}\right) \Big/ \hat{f}_n(\cdot)$ ，$K_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-isu)\frac{\phi_K(s)}{\varphi_e(s/h)}ds$ 。$\phi_K(\cdot)$ 为核函数 $K(\cdot)$ 的Fourier的变换，$\phi_e(\cdot)$ 为测量误差变量 e 的特征函数，i是虚数单位，分别用 $m_n(z)$ 、$W_{nj}(z)$ 替换式(3)中的 $\hat{m}(u)$ 、$W_j(u)$ ，可得估计的辅助随机变量：

$$\hat{\zeta}_i(\beta) = \frac{\partial \tilde{g}(X_i, \beta)}{\partial \beta}\left[\tilde{Y}_i - \tilde{g}(X_i, \beta)\right]$$

以此可以构造出一个估计的经验对数似然比函数：

$$\hat{l}_n(\beta) = -2\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\log(np_i) | p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{\zeta}_i(\beta) = 0\right\}$$

运用Lagrange乘子法，可以得到估计的经验对数似然比统计量：

$$\hat{l}_n(\beta) = 2\sum_{i=1}^{n}\log\left(1 + \lambda^{\tau}\hat{\zeta}_i(\beta)\right) \tag{6}$$

其中 λ 为Lagrange乘子，满足：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\zeta}_i(\beta)}{1 + \lambda^{\tau}\hat{\zeta}_i(\beta)} = 0 \tag{7}$$

记：

$$\frac{\partial g(X_i, \beta)}{\partial \beta_l} = h_l(U_i, \beta) + v_{il}(\beta), \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le l \le p$$

其中 $h_l(U_i, \beta) = \mathrm{E}\left(\frac{\partial g(X_i, \beta)}{\partial \beta_l} | U_i\right)$ 。则当 $0 < \sup_i \mathrm{E}[v_{il}^2(\beta)] < \infty$ 时，结合大数定律有：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i(\beta) v_i^{\tau}(\beta) \to \Omega(\beta), \ a.s., \ n^{-3/4}\left|\sum_{i=1}^{n} v_{il}(\beta)\right| = O(1), \quad a.s. \tag{8}$$

对于所有的 $l = 1, 2, \cdots, p$ 均成立，$v_i(\beta) = (v_{il}(\beta), \cdots, v_{ip}(\beta))^{\tau}$ ，$\Omega(\beta) \triangleq \mathrm{E}\left[\frac{\partial g(X, \beta)}{\partial \beta} - \mathrm{E}\left\{\frac{\partial g(X, \beta)}{\partial \beta} | U\right\}\right]^{\otimes 2} > 0$ 是 $p \times p$ 的正定矩阵，其中 $A^{\otimes 2} = AA^{\tau}$ 。

为了得到 $\hat{l}_n(\beta)$ 的渐近分布，给出以下几个基本假设条件：

A1 对 $u \in [0, 1]$ ，$m(u)$ 、$h_l(u, \beta)$ 、U 的密度函数 $f(u)$ 满足一阶的Lipschitz条件且 $0 < \inf_{0 \le u \le 1} f(u) \le \sup_{0 \le u \le 1} f(u) < \infty$ 。

A2 对每一个 X ，$g(X, \beta)$ 关于 β 都有连续的二阶导数。

A3 (i)存在 $\gamma > 0$ ，使得 $\sup_{n \ge 1}\mathrm{E}\left(|\varepsilon_n|^{2+\gamma} | F_{n-1}\right) < \infty$, $a.s.$ ；(ii)存在 $0 < \sigma^2 < \infty$ ，使得 $\mathrm{E}(\varepsilon_i^2 | F_{i-1}) = \sigma^2 + o(1)$ ，$a.s.$

A4 $\sup_{-\infty < i < \infty}\mathrm{E}(e_i) < \infty$ ，$a.s.$

A5 测量误差 e 的特征函数 $\phi_e(\cdot)$ 非退化，且分布是普通光滑的。

A6 非负有界 k 阶核函数 $K(\cdot)$ 满足：$\int_{-\infty}^{\infty} K(u)\mathrm{d}u = 1$ ，$\int_{-\infty}^{\infty} u^j K(u)\mathrm{d}u = 0, j = 1, \cdots, k-1$ ，$\int_{-\infty}^{\infty} u^k K(u)\mathrm{d}u \ne 0$ ；$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi_K(u) u^{\alpha}\right|\mathrm{d}u < \infty$ ，$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi_K(u) u^{\alpha}\right|^2 du < \infty$ 。

定理1：假定条件A1—A6成立。在 β 是参数真值条

件下，$\hat{l}_n(\beta)\xrightarrow{L}\chi_p^2$，其中"$\xrightarrow{L}$"表示依分布收敛。

基于定理1，可以构造参数 β 的 $1-\alpha_0$ 水平的置信域：$Q(\beta)=\{\beta:\hat{l}_n(\beta)\le c_{\alpha_0}\}$ 其中 $o<\alpha_0<1$，存在 c_{α_0} 使得 $P(\chi_p^2>c_{\alpha_0})=\alpha_0$。

2 定理的证明

引理1：在定理1的条件下：

$$\max_{1\le i\le n}\left|m(U_i)-\sum_{k=1}^{n}W_{nk}m(U_k)\right|=o(n^{-1/2}),\ a.s.$$

证明：当测量误差分布的特征函数 $\phi_e(\cdot)$ 满足当 $u\to\infty$ 时，$d_0|u|^{-\alpha}\le|\phi_e(u)|\le d_1|u|^{-\alpha}$，其中 d_0、d_1、α 为正常数，存在正常数 M 和 C，当 $|s|>M$ 时，$|\phi_e(s)|\ge C|s|^{-\alpha}$，由文献[9]得到：

$$|K_n(u)|=O(h^{-\alpha})\text{ 和 }\max_{1\le i\le n}|W_{nm}(u)|=O\left(\left(nh^{1+\alpha}\right)^{-1}\right),\ a.s. \tag{9}$$

因为误差为鞅差序列，有 $E(\varepsilon_i)=E(E(\varepsilon_i|F_{i-1}))=0$，不难得出：

$$\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}W_{nk}(Z_i)\varepsilon_k\right|=O(n^{-1/2}),\ a.s. \tag{10}$$

根据文献[13]的定理4可得：

$$\max_{1\le i\le n}\left|m(U_i)-\sum_{k=1}^{n}W_{nk}(Z_i)\{m(U_k+\varepsilon_k)\}\right|=o(n^{-1/2}),\ a.s.$$

因此 $\max_{1\le i\le n}\left|m(U_i)-\sum_{k=1}^{n}W_{nk}(Z_i)m(U_k)\right|=o(n^{-1/2})$，$a.s.$

引理2：在定理1的条件下，当 β 是真实参数，有：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta}\left[\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta}\right]^{\tau}\to\Omega(\beta),\ a.s. \tag{11}$$

其中 $\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta}\triangleq\left(\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta_1},\cdots,\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta_p}\right)^{\tau}$。

证明：见文献[9]引理4.3。

引理3：在定理1的条件下，若 β 是真实参数，则：

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)\xrightarrow{L}N(0,\sigma^2\Omega(\beta)) \tag{12}$$

证明：

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i-g(X_i,\beta)-m_n(Z_i)\right]\frac{\partial g(X_i,\beta)}{\partial\beta}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{m}(U_i)\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta}-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\bar{\varepsilon}_i\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta}$$

$$\triangleq\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}B\varepsilon_i+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}B\tilde{m}(U_i)-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}B\bar{\varepsilon}_i$$

其中 $B=\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta}$，$B_l=\frac{\partial\tilde{g}(X_i,\beta)}{\partial\beta_l}$ 代表 B 的第 l 项，$\tilde{m}(U_i)=m(U_i)-\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(Z_i)m(U_j)$，$\bar{\varepsilon}_i=\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(Z_i)\varepsilon_j$。

首先证明 $\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(Z_i)B=o(n^{1/2})$，$a.s.$ 成立。考虑其第 l 项，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{ni}(Z_k)B_l=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{ni}(Z_k)v_{kl}(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{ni}(Z_k)\tilde{h}_l(U_k,\beta)-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{q=1}^{n}W_{nq}(Z_k)v_{ql}(\beta)\right\}W_{ni}(Z_k)\right]$，其中 $\tilde{h}_l(U_k,\beta)=h_l(U_k,\beta)-\sum_{k=1}^{n}W_{nk}(Z_i)h_l(U_i,\beta)$。

由式(9)及文献[9]引理2容易得到：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{h}_l(U_k,\beta)W_{nk}(Z_m)\right|\le n\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(Z_k)\right|\max_{1\le k\le n}\left|\tilde{h}_l(U_m,\beta)\right|$$
$$=o(n^{1/2}),\ a.s.$$

由式(8)、式(9)及Abel不等式，得到：

$$\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(Z_i)B=o(n^{1/2}),\ a.s. \tag{13}$$

由引理1和引理2有：

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}B\tilde{m}(U_i)\right\|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\le i\le n}\left|\tilde{m}(U_i)\right|\sum_{i=1}^{n}\|B\|=o(1)$$

误差为鞅差序列 $\mathrm{E}(\varepsilon_j|F_{i-1})=0$，$\mathrm{E}(\varepsilon_j)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(\varepsilon_j|F_{j-1}))=0$。由式(13)和条件A3(i)得：

$$E\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\bar{\varepsilon}_i\sum_{i=1}^{n}B\right\|^2\le\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}BW_{nj}(Z_i)\right\|\right)^2E\varepsilon_j^2=o(1)$$

即：

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\bar{\varepsilon}_iB=o(1),\ a.s. \tag{14}$$

所以要证引理3成立，只需证 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_iB\xrightarrow{L}N(0,\sigma^2\Omega(\beta))$。

设 $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}BB^{\tau}$，由 $\Omega(\beta)$ 的定义和引理2及Cramer Wold法则，只需证明对于任意的 $p\times1$ 维向量 d，$d^{\tau}\frac{1}{\sqrt{n}}S_n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_iB\xrightarrow{L}N(0,\sigma^2\|d\|^2)$，$a.s.$

令 $a_{ni}=d^{\tau}\frac{1}{\sqrt{n}}S_n^{-1/2}B$，$\xi_{ni}=a_{ni}\varepsilon_i$，根据鞅差中心极限定理，只需证明：

$$\sum_{i=1}^{n}E(\xi_{ni}^2|F_{i-1})\xrightarrow{p}\sigma^2\|d\|^2 \tag{15}$$

$$\text{对于任何 }\sigma>0,\ \sum_{i=1}^{n}E\left(\xi_{ni}^2I(|\xi_{ni}|>\sigma)|F_{i-1}\right)\xrightarrow{p}0 \tag{16}$$

使用条件A3(ii)，有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}E(\xi_{ni}^2|F_{i-1})-\sigma^2\|d\|^2\right|$$

$$=\left|d^{\tau}\left(S_n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}BB^{\tau}E(\varepsilon_i^2|F_{i-1})S_n^{-\frac{1}{2}}-\sigma^2I_p\right)d\right|$$

$$\le d^{\tau}S_n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}BB^{\tau}\left|o_p(1)\right|S_n^{-\frac{1}{2}}d\xrightarrow{p}0$$

由此可得式(15)。引理2表明 $\max_{1\le i\le n}\|B\|/\sqrt{n}\to0$，因此 $\max_{1\le i\le n}\|a_{ni}\|\to0$。

结合式(15)、条件A3 (i)以及Markov不等式，对任意的 $\delta>0$，有：

$$\sum_{i=1}^{n}E\left(\xi_{ni}^2 I\left(\left|\xi_{ni}\right|>\delta\right)\middle|F_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}E\left(a_{ni}^2\varepsilon_i^2 I\left(\left|a_{ni}\varepsilon_i\right|>\delta\right)\middle|F_{i-1}\right)$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2 E\left(\left|\varepsilon_i\right|^{2+\gamma}\middle|F_{i-1}\right)\delta^{-\gamma}\left|a_{ni}\right|^{\gamma}\le C\delta^{-\gamma}\max\left|a_{ni}\right|^{\gamma}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2\xrightarrow{p}0$$

至此，得证式(16)，此引理得证。

引理4：在定理1的条件下，若 β 是真实参数，则：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)\hat{\zeta}_i^{\tau}(\beta)\xrightarrow{P}\sigma^2\Omega(\beta)$$

证明：经过简单计算，有：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)\hat{\zeta}_i^{\tau}(\beta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\varepsilon_i+\tilde{m}(U_i)-\bar{\varepsilon}_i\right]^2BB^{\tau}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2BB^{\tau}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{m}^2(U_i)BB^{\tau}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{\varepsilon}_i^2BB^{\tau}+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\tilde{m}(U_i)BB^{\tau}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\bar{\varepsilon}_iBB^{\tau}$$

$$-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{m}(U_i)\bar{\varepsilon}_iBB^{\tau}\triangleq C_1+C_2+C_3+2C_4-2C_5-2C_6$$

由引理2和条件A3(ii)可知，对与 C_1：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}BB^{\tau}E\left(\varepsilon_i^2\middle|F_{i-1}\right)\xrightarrow{p}\sigma^2\Omega(\beta)$$

进一步，对于任意的 $p-$ 维常数向量 d，将证明：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d^{\tau}BB^{\tau}\left(\varepsilon_i^2-E\left(\varepsilon_i^2\middle|F_{i-1}\right)\right)d\xrightarrow{p}0$$

引理2表明 $\max_{1\le i\le n}\|B\|/\sqrt{n}\to 0$。又因为 $\{d^{\tau}BB^{\tau}(\varepsilon_i^2-E(\varepsilon_i^2|F_{i-1}))d,\ F_i,i\ge 1\}$ 是一个鞅差序列，通过运用Burkholder不等式[14]、Stout[15]的不等式3.3.14以及条件A3(i)和引理2，对于任意的 $0<\alpha<1$，有：

$$E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d^{\tau}BB^{\tau}\left(\varepsilon_i^2-E\left(\varepsilon_i^2\middle|F_{i-1}\right)\right)d\right|^{1+\alpha}$$

$$\le\frac{n^{\frac{\alpha-1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(d^{\tau}BB^{\tau}d\right)^{1+\alpha}E\left|\varepsilon_i^2-E\left(\varepsilon_i^2\middle|F_{i-1}\right)\right|^{1+\alpha}}{n^{1+\alpha}}$$

$$\le d\frac{\max_{1\le i\le n}\|B\|^{2\alpha}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|B\|^2\right)}{n^{(1+\alpha)/2}}=o\left(n^{\alpha}\right)\Big/n^{(1+\alpha)/2}=o(1)$$

所以 $C_1\xrightarrow{P}\sigma^2\Omega(\beta)$。因此为证明引理4，只需证明 $C_i=o(1)$，$i=2,3,4,5,6$。结合引理1以及引理2，对于任意的 $p-$ 维常数向量 d，易得：

$$\left|d^{\tau}C_2d\right|\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|d^{\tau}BB^{\tau}d\left(\tilde{m}(U_i)\right)^2\right|\le\max_{1\le i\le n}\left|\tilde{m}(U_i)\right|^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|d^{\tau}BB^{\tau}d\right|=o(1)$$

上式证明了 $C_2=o(1)$。根据式(14)、引理1、引理2和条件A3(i)类似于 C_2 的证明，可证 $C_i=o(1)$，$i=3,4,5,6$。至此引理4得证。

引理5：在定理1的条件下，若 β 是真实参数，则：

$$\max_{1\le i\le n}\left\|\hat{\zeta}_i(\beta)\right\|=o_p\left(n^{1/2}\right)\tag{17}$$

$$\|\lambda\|=O_p\left(n^{-1/2}\right)\tag{18}$$

证明：经过简单计算有 $\max_{1\le i\le n}\left\|\hat{\zeta}_i(\beta)\right\|\le\max_{1\le i\le n}\left\|B\varepsilon_i\right\|+\max_{1\le i\le n}\left\|B\tilde{m}(U_i)\right\|+\max_{1\le i\le n}\left\|B\bar{\varepsilon}_i\right\|\triangleq R_1+R_2+R_3$

由引理2可知 $\max_{1\le i\le n}\|B\|=o\left(\sqrt{n}\right)$，再结合式(13)、条件A3以及引理1，即可得证式(17)。利用引理3、引理4及式(17)并类似于Owen[16]的方法，可以证明式(18)成立。

定理1的证明：将式(6)泰勒展开，有：

$$\hat{l}_n(\beta)=2\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda^{\tau}\hat{\zeta}_i(\beta)-\left(\lambda^{\tau}\hat{\zeta}_i(\beta)\right)^2\Big/2\right)+o_p(1)\tag{19}$$

根据式(7)有：

$$0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\zeta}_i(\beta)}{1+\lambda^{\tau}\hat{\zeta}_i(\beta)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)\hat{\zeta}_i^{\tau}(\beta)\lambda+$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\zeta}_i(\beta)\left[\lambda^{\tau}\hat{\zeta}_i(\beta)\right]^2}{1+\lambda^{\tau}\hat{\zeta}_i(\beta)}$$

由引理3至引理5得：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\hat{\zeta}_i(\beta)\right\|^3\|\lambda\|^2\left|1+\lambda^{\tau}\hat{\zeta}_i(\beta)\right|^{-1}\le O_p\left(n^{-1}\right)\max_{1\le i\le n}\left\|\hat{\zeta}_i(\beta)\right\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\hat{\zeta}_i(\beta)\right\|^2=o_p\left(n^{-1/2}\right)$$

从而，$\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)\hat{\zeta}_i^{\tau}(\beta)\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)+o_p\left(n^{-1/2}\right)$。

代入式(19)有：

$$\hat{l}_n(\beta)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)\right)^{\tau}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)\hat{\zeta}_i^{\tau}(\beta)\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\zeta}_i(\beta)\right)+o_p(1)$$

再结合引理3和引理4，此定理得证。

3 结束语

鞅差序列在经济学、金融学以及其他学科领域有着广泛的应用，本文把经验似然方法推广到鞅差序列下非线性半参数测量误差模型。运用逆卷积的方法得到了非参数的无偏估计，并应用辅助随机变量构造了未知参数的经验对数似然比统计量，证明了该经验对数似然比统计量服从渐近卡方分布以及构造出未知参数估计量的置信域。通过得到的统计量的渐近性质，说明了经验似然方法在鞅差误差序列下非线性半参数测量误差回归模型中是有效的，为研究带有鞅差误差序列的非线性半参数测量误差回归模型提供了一种思路。

参考文献：

[1]Engle R F, Granger C W J, Rice J, et al. Semiparametric Estimates of the Relation Between Weather and Electricity Sales [J].Journal of the American statistical Association, 1986, 81(394).

[2]Liang H, Hardle W, Carroll R J. Estimation in a Semiparametric Partially Linear Errors-in-variables Model [J].Annals of Statistics, 1999, 27(5).

[3]Cui H J, Chen S X. Empirical Likelihood Confidence Region for Parameter in the Errors-in-variables Models [J].Journal of Multivariate Analysis, 2003, (84).

[4]Wang Q H, Jing B Y. Empirical Likelihood for Partial Linear Models With Fixed Designs [J].Statistics and Probability Letters, 1999, (41).

[5]公徐路，李幸福.响应变量缺失时纵向数据下部分线性模型的广义经验似然推断[J].统计与决策，2019，35(14).

[6]Li G R, Xue L G.Empirical Likelihood Confidence Region of the Pa-

DOI:10.13546/j.cnki.tjyjc.2020.07.006

改进初值的灰色Verhulst-Markov模型及其应用

沈琴琴[1,2],王 玥[1],黄 悦[1],刘恒孜[1]

(1.南通大学 交通学院,江苏 南通 226019;2.苏州大学 轨道交通学院,江苏 苏州 215000)

摘 要:文章提出了一种新的改进初值的灰色Verhulst-Markov预测模型,并应用到城市道路短时交通流预测中。在新的预测模型中,首先利用倒数变换和最小二乘法给出了灰色Verhulst模型新的初值计算方法,然后利用Markov链对预测的残差进行了修正。来自OpenITS的实际短时交通流算例验证了新预测模型的有效性。

关键词:灰色Verhulst模型;Markov链;初值优化;短时交通流预测

中图分类号:N941 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-6487(2020)07-0030-04

0 引言

基于灰色理论的预测模型是通过原始序列的累加生成方法揭示系统的发展趋势,具有小样本、贫信息等优点,在短时交通流预测[1]、人口预测[2]、电力负荷预测[3]等工程应用领域有着广泛的应用。常见的灰色预测模型包括GM(1,1)、GM(1,N)、DGM(1,1)、灰色Verhulst模型等[4],其中灰色Verhulst模型主要用来描述具有饱和状态的过程,适用于数据呈S型状态的预测。短时交通流数据通常具有复杂的非线性、波动性等特征,采用灰色Verhulst模型比其他几类灰色预测模型具有较高的预测精度。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61771265);国家级大学生创新训练计划项目(201710304038Z);江苏省现代教育技术研究课题(2017-R-54054);江苏省高校自然科学基金面上项目(18KJB580012)

作者简介:沈琴琴(1984—),女,江苏如皋人,博士研究生,实验师,研究方向:智能交通、灰色预测。

rameter in the Partially Linear Errors-in-variables Model [J].Communications in Statistics -Theory and Methods, 2008, 37(10).

[7]崔恒建.有重复观测的部分线性EV模型的参数估计[J].中国科学(A辑:数学),2004,34(4).

[8]李晓妍.带线性误差的部分线性EV模型的经验似然推断[J].统计与决策,2017(19).

[9]冯三营,李高荣,薛留根,陈放.非线性半参数EV模型的经验似然置信域[J].高校应用数学学报,2010,25(1).

[10]Chen X, Cui H. Empirical Likelihood Inference for Partial Linear Models Under Martingale Difference Sequence [J].Statistics &Probability Letters, 2008, 78(17).

[11]李国亮,刘禄勤.误差为鞅差序列的部分线性模型中估计的强相合性[J].数学物理学报,2007,(5).

[12]Fan G L, Liang H Y, Xu H X.Empirical Likelihood for Heteroscedastic Partial Linear Model [J].Communications in Statistics - Theory and Methods, 2011, 40(8).

[13]Fan J, Truong Y K.Nonparametric Regression With Errors in Variables [J].Annals of Statistics, 1993, 21(4).

[14]Hall P, Heyde C C. Martinggale Limit Theory and Its Application [M].New York: Academic Press, 1980.

[15]Stout W F.Almost Sure Convergence [M].New York: Academic Press, 1974.

[16]Owen A B. Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions [J]. Annals of Statistics, 1990, (18).

(责任编辑/亦 民)

Empirical Likelihood Inference for Nonlinear Semi-parametric EV Models Under Martingale Difference Sequences

Lü Shengri, He Bangqiang

(School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu Anhui 241000, China)

Abstract: This paper studies the regression model of nonlinear semi-parametric EV models under martingale difference sequences, and then uses inverse convolution to obtain the nonparametric unbiased estimation to construct an empirical logarithmic likelihood ratio statistic for unknown parameters. When the measurement error distribution is normally smooth, the paper proves that the empirical log-likelihood ratio statistic obeys the asymptotic chi-square distribution, and that the result can be used to construct the confidence regions of unknown parameters.

Key words: martingale difference sequences; nonlinear semi-parametric model; inverse convolution; empirical likelihood; asymptotic chi-square distribution