文章编号:1672-2477(2022)01-0086-08

删失数据下含变量误差(EV)半参数变系数 Panel 模型经验似然

李文斌,何帮强*

(安徽工程大学 数理与金融学院,安徽 芜湖 241000)

摘要:研究考虑了删失情况下含有误差变量(Errors-in-Variables,EV)的半参数变系数面板数据模型,考虑的是非参数部分的解释变量含有 EV,在这种情况下,一般的经验 log 似然比统计量会有误差扰动,这里构建了删失情况下未知参数的调整的经验 log 似然比统计量,并证明了在合适的条件下,所提出的统计量服从趋近 chi-square 分布,所得结果可以用来构建未知参数的置信域。

关 键 词:删失数据;误差变量;面板数据;经验似然;趋近 chi-square 分布

中图分类号:O212.7　　　　**文献标志码**:A

半参数变系数模型在近些年来被广泛研究的模型,它一般可以简化为线性模型部分、线性模型等一系列退化情形的模型。半参数变系数模型与其他线性或者部分线性模型相比较,是一种更应用多变的函数形式,同时还避免了相当多的“维数祸根”问题。研究考虑的是具有误差变量(Errors-in-Variables,EV)半参数变系数部分线性的模型:

$$\begin{cases} Y = X^{\tau}\beta + Z^{\tau}g(U) + \varepsilon \\ W = Z + e \end{cases}, \tag{1}$$

式中,响应变量是 Y;解释变量是 X、Z 和 U,其中 X 是 p 维随机向量;Z 是 q 维不可观测随机变量,U 是 1 维随机变量;$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)\tau$ 是 p 维未知参数量;$g(U)=(g_1(U),g_2(U),\cdots,g_q(U))^{\tau}$ 是 q 维未知函数向量;ε 是不可观测的随机误差。

You 等[1]研究了半参数变系数含 EV 的回归模型的估计,利用校正衰减方法提出修正的 profile 最小二乘法估计参数部分以及利用局部多项式的方法估计非参数部分。冯三营等[2]研究了半参数变系数模型,考虑其中的非参数部分的解释变量含有 EV,并且构建了参数的局部的纠偏经验 log 似然比统计量。陈夏等[3]研究了半参数变系数部分线性 EV 模型,考虑的是参数部分解释变量具有 EV。本文考虑的是模型的非参数部分的解释变量带有 EV 的半参数变系数面板数据模型。在医学、可靠性工程、金融保险、环境科学和临床的试验研究中经常会遇到随机删失的情况。王启华等[4-5]研究了随机删失的情况下半参数线性模型,考虑了其中的参数估计的渐进特征与参数的经验似然推断。陈放等[6]研究了在右删失的情况下,非线性回归模型的经验似然推断。侯文等[7]研究了在删失数据下,若干个半参数模型的经验似然和惩罚经验似然的推断。刘强等[8]研究了随机删失发生在响应变量中,部分线性 EV 模型的统计推断,考虑构建了其中的未知参数的经验 log 似然比统计量。李芸[9]分别研究了基于区间删失数据下的变系数模型和部分线性模型的统计推断。闫一冰等[10]研究了随机右删失发生在响应变量中,部分线性测量误差模型的统计推断。类似的研究还有许多,比如文献[11-18]都是最新的研究成果。面板数据在现今生活中应用非常广泛,比如经济、金融、生物、工程和社会科学等领域,同时面板数据可以为研究人员提供更大规模的扩展。在寻常的研究中收集的数据往往不能完全观测,面板数据更是由截面和时间序列融合在一起的数据,因此研究删失数据下的面板数据更具有实际意义。在删失数据下参数估计量的渐近方差会非常复杂,所以本文将经验似然应用其中,既不需要估计方差,又使得统计推断不会繁杂。因为有测量误差,所以研究

收稿日期:2021-10-18
基金项目:国家社会科学基金资助项目(18BTJ034)
作者简介:李文斌(1994-),男,安徽六安人,硕士研究生。
通信作者:何帮强(1974-),男,安徽庐江人,副教授,博士。

对构造的辅助随机变量进行了修正，并修正了由测量误差引起的估计偏差。

本文研究了删失数据下含有 EV 的半参数变系数面板数据模型的经验似然推断，构建了关于未知参数的修正经验 log 似然比统计量，在合适的条件下证明了所构建的统计量趋近于 χ^2 分布，所得到的结果可以用作构建未知参数的置信域。

1　方法与主要结果

假设数据 $\{Y_{it},X_{it},Z_{it},U_{it},W_{it},i=1,2,\cdots,n;t=1,\cdots,T\}$ 是来自 $\{Y,X,Z,U,W\}$ 的一个独立同分布的样本，即有

$$\begin{cases}Y_{it}=X_{it}^{\tau}\beta+Z_{it}^{\tau}g(U_{it})+\varepsilon_{it}\\ W_{it}=Z_{it}+e_{it}\end{cases},\tag{2}$$

式中，Z_{it} 是不可随意观测的随机变量；W_{it} 是可观测到的随机变量；ε_{it}、e_{it} 是与 Z_{it} 互相独立的，ε_{it} 是随机误差，且 $E(\varepsilon_{it})=0,E(e_{it})=0,var(\varepsilon_{it})\sigma^2<\infty,var(e_{it})=\Sigma_e$。

研究考虑的是删失下的情况，当响应变量 Y 被删失变量 C 随机右删失的时候，观察到的是 ζ_{it}、δ_{it}，而不是 Y_{it}，其中，

$$\zeta_{it}=min\{Y_{it},C_{it}\},\delta_{it}=I(Y_{it}\leqslant C_{it}),i=1,2,\cdots,n;t=1,2,\cdots,T,$$

式中，C_{it} 是来自删失变量 C 的样本数据，且假定 $\{Y_{it},X_{it},Z_{it},T_{it},W_{it}\}$ 独立。假设 $A(\cdot)$、$B(\cdot)$ 分别作为响应变量 Y_{it} 与删失变量 C_{it} 的分布，记

$$\tau_A=inf\{u:A(u)=1\},\tau_B=inf\{u:B(u)=1\},$$

现假定

$$\tau_B\geqslant\tau_A,Y_{it}\geqslant0,C_{it}\geqslant0,i=1,2,\cdots,n;t=1,2,\cdots,T。$$

由于 Y_{it} 被随机地删失，通常情况下参数的估计方法不能被直接的应用，原因是 ζ_{it} 与 Y_{it} 拥有不一样的数学期望，需要对数据进行转换。当 B 已知时，定义

$$Y_{itB}=\frac{\delta_{it}\zeta_{it}}{1-B(\zeta_{it})},i=1,2,\cdots,n;t=1,2,\cdots,T,$$

可以证明

$$E(Y_{itB}\mid X_{it},Z_{it},U_{it})=E(Y_{it}\mid X_{it},Z_{it},U_{it})=X_{it}^{\tau}\beta+Z_{it}^{\tau}g(U_{it})。$$

采用 Profile 最小二乘估计的方法，假设有一个随机的样本 $\{(U_{it},X_{it1},\cdots,X_{itp},Z_{it1},\cdots,Z_{itq},Y_{it}),i=1,\cdots,n;t=1,\cdots,T\}$ 来自于式(2)第一式。当 β 给定时，有

$$Y_{itB}-\sum_{m=1}^{p}X_{itm}\beta_m=\sum_{l=1}^{q}Z_{itl}g_l(U_{it})+\varepsilon_{it},i=1,\cdots,n;t=1,\cdots,T,\tag{3}$$

运用局部多项式的方法对模型(3)中 $g(U)$ 这个变系数函数进行估计，假如操作中没有 EV 的情况，即 Z_{it} 已知时，那么 U_{it} 在 u_0 的一个小邻域内时，可以估计 $g_j(U_{it})$ 为

$$g_j(U_{it})\approx g_j(u_0)+g_j^{'}(u_0)(U_{it}-u_0)\equiv a_j+b_j(U_{it}-u_0),j=1,2,\cdots,q,$$

式中，$g_j^{'}(u)=\dfrac{dg_j(u)}{du}$，对下面的加权最小二乘问题进行极小化操作，求 $\{(a_j,b_j),j=1,2,\cdots,q\}$ 的估计值就是使得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left(Y_{itB}-\sum_{j=1}^{p}X_{itj}\beta_j\right)-\sum_{j=1}^{q}[a_j+b_j(U_{it}-u_0)]Z_{itj}\right\}^2K_h(U_{it}-u_0),\tag{4}$$

式中，$K(\cdot)$ 为核函数；h 称之为窗宽；$K_h(\cdot)=\dfrac{K\dfrac{\cdot}{h}}{h}$ 为常数且收敛于零。

记

$$Y_B=(Y_{11B},\cdots,Y_{1TB},\cdots,Y_{nTB})^{\tau},X=(X_{11},\cdots,X_{1T},\cdots,X_{nT})^{\tau},\varepsilon=(\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1T},\cdots,\varepsilon_{nT})^{\tau},$$

$$W=(W_{11},\cdots,W_{1T},\cdots,W_{nT})^{\tau},\omega_u=diga(K_h(U_{11}-u),\cdots,K_h(U_{1T}-u),\cdots,K_h(U_{nT}-u)),$$

$$D_u^Z=\begin{pmatrix} Z_{11}^\tau & \frac{U_{11}-u}{h}Z_{11}^\tau \\ \vdots & \vdots \\ Z_{1T}^\tau & \frac{U_{1T}-u}{h}Z_{1T}^\tau \\ \vdots & \vdots \\ Z_{nT}^\tau & \frac{U_{nT}-u}{h}Z_{nT}^\tau \end{pmatrix},M=\begin{pmatrix} Z_{11}^\tau g(U_{11}) \\ \vdots \\ Z_{1T}^\tau g(U_{1T}) \\ \vdots \\ Z_{nT}^\tau g(U_{nT}) \end{pmatrix}。$$

则基于式(4)由广义最小二乘法可得

$$(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\cdots,\hat{a}_q,h\hat{b}_1,h\hat{b}_2,\cdots,h\hat{b}_q)=((D_u^Z)^\tau\omega_u D_u^Z)^{-1}(D_u^Z)^\tau\omega_u(Y_B-X\beta), \tag{5}$$

因为 Z_{it} 不可观测，可观测到的是含有误差扰动项 $W_{it}W$，如果式(5)中直接操作 Z_{it} 被 W_{it} 替代，则这里的估计不再被认为是相合估计，为了消定估计中是 EV 所导致的偏差，参考了 Feng 等[19] 的方法，对式(5)进行下面形式的局部修正得

$$(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\cdots,\hat{a}_q,h\hat{b}_1,h\hat{b}_2,\cdots,h\hat{b}_q)=((D_u^Z)^\tau\omega_u D_u^Z-\Omega)^{-1}(D_u^Z)^\tau\omega_u(Y_B-X\beta), \tag{6}$$

式中，D_T^W 是由 W_{it} 替换 D_T^Z 中的 Z_{it} 所得，且

$$\Omega=\sum_{i=1}^n\sum_{t=1}^T\Sigma_\varepsilon\otimes\begin{pmatrix} 1 & \frac{U_{it}-u}{h} \\ \frac{U_{it}-u}{h} & \left(\frac{U_{it}-u}{h}\right)^2 \end{pmatrix}K_h(U_{it}-u),$$

这里的 $\otimes$ 表示的是克罗内克乘积。

$$\hat{M}=\begin{pmatrix} (W_{11}^\tau \quad 0_q^\tau)((D_{U_{11}}^Z)^\tau\omega_{U_{11}}D_{U_{11}}^Z-\Omega)^{-1}(D_{U_{11}}^Z)^\tau\omega_{U_{11}} \\ \vdots \\ (W_{1T}^\tau \quad 0_q^\tau)((D_{U_{1T}}^Z)^\tau\omega_{U_{1T}}D_{U_{1T}}^Z-\Omega)^{-1}(D_{U_{1T}}^Z)^\tau\omega_{U_{1T}} \\ \vdots \\ (W_{nT}^\tau \quad 0_q^\tau)((D_{U_{nT}}^Z)^\tau\omega_{U_{nT}}D_{U_{nT}}^Z-\Omega)^{-1}(D_{U_{nT}}^Z)^\tau\omega_{U_{nT}} \end{pmatrix}(Y_B-X\beta)\triangleq S(Y_B-X\beta),$$

定义 $S=(Q_1W_1,\cdots,Q_nW_n)$，构建的辅助随机变量为

$$\eta_i(\beta)=\sum_{t=1}^T[X_{it}(Y_{it}-X_{it}\beta)-X^\tau Q_{it}^\tau\Sigma_e Q_{it}(Y-X\beta)],$$

由于随机删失情况下的线性模型中参数估计量的趋近方差计算较为繁琐，运用近似于 Owen[20] 所提出的方法，可以得到经验 log 似然比函数为

$$l_n(\beta)=-2max\{\sum_{i=1}^n log(np_i)\mid\sum_{i=1}^n p_i=1,p_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^n p_i\eta_i(\beta)=0\},$$

然而，B 分布函数在实际中往往未知，这时采用 Kaplan-Meier 估计

$$B_n=1-\prod_{i=1}^n\left(\frac{N^+(\zeta_i)}{1+N^+(\zeta_i)}\right)^{I(\zeta_i\leqslant v,\delta_i=0)},v\geqslant 0,$$

式中，$N^+(v)=\sum_{i=1}^n I(\zeta_i>v)$，记

$$H=(h_1^\tau,\cdots,h_n^\tau),h_i=(Z_{i1}g(U_{i1}),\cdots,Z_{iT}g(U_{iT})),X_i=(X_{i1}^\tau,\cdots,X_{iT}^\tau),Y_i=(Y_{i1}^\tau,\cdots,Y_{iT}^\tau),$$

$$\widetilde{X}=(I_{nT}-S)X,\widetilde{Y}=(I_{nT}-S)Y。$$

其中，

$$Y_{iB_n}=\frac{\delta_i\zeta_i}{1-B_n(\zeta_i)},i=1,\cdots,n,$$

则 $\widetilde{Y}_{iB_n}=(I_{nT}-S)Y_{iB_n}$，所以把上面所构建的辅助随机变量可改写为

$$\hat{\eta}_i(\beta)=\sum_{t=1}^T[\widetilde{X}_{it}(\widetilde{Y}_{it}-\widetilde{X}_{it}^\tau\beta)-X^\tau Q_{it}^\tau\Sigma_e Q_{it}(Y_{B_n}-X\beta)]。 \tag{7}$$

从而该参数的 log 经验似然比函数可以写为

$$\hat{l}_n(\beta) = -2max\{\sum_{i=1}^{n} log(np_i) \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{\eta}_i(\beta) = 0\}, \tag{8}$$

由拉格朗日乘子法可得

$$\hat{l}_n(\beta) = 2\sum_{i=1}^{n} log\{1 + \lambda^{\tau}\hat{\eta}_i(\beta)\}, \tag{9}$$

式中,λ 是拉格朗日乘子,且满足$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\eta}_i(\beta)}{1+\lambda^{\tau}\hat{\eta}_i(\beta)} = 0$。

为了下面内容方便描述,引入一些记号,

$A^{\otimes 2} = AA^{\tau}, \Phi(U) = E(WX^{\tau} \mid U), \Gamma(U) = E(WW^{\tau} \mid U)$,

$\Sigma_1(\beta) = E[(X - \Phi^{\tau}(U)\Gamma^{-1}(U)Z)(\varepsilon - e^{\tau}g(U))]^{\otimes 2} - E[\Phi^{\tau}(U)\Gamma^{-1}(U)\Sigma_e\Gamma^{-1}(U)\Phi^{\tau}(U)\varepsilon^{\tau}\varepsilon] + E\{\Phi^{\tau}(U)\Gamma^{-1}(U)(ee^{\tau} - \Sigma_e)g(U)\}^{\otimes 2}$。

$$H(s) = \frac{\sum_{t=1}^{T} E[X_{it} - E(W_{it}W_{it}^{\tau} \mid U_{it})E(W_{it}X_{it}^{\tau} \mid U_{it})W_{it}]Y_B I(s < \zeta)}{(1 - A(s-))(1 - B(s))},$$

$\Delta = E(XX^{\tau}) - E(E^{\tau}(WX^{\tau} \mid U)E^{-1}(WW^{\tau} \mid U)E^{\tau}(WX^{\tau} \mid U))$,

$$\Lambda^B(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{1 - B(s-)} dB(s), \Delta\Lambda^B(u) = \Lambda^B(u) - \Lambda^B(u-),$$

$$\Sigma_2(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(s)H^{\tau}(s)(1 - A(s-))(1 - \Delta\Lambda^B(s))dB(s),$$

$\Sigma(\beta) = \Sigma_1(\beta) - \Sigma_2(\beta)$。

为了得到研究的结果,列出下列条件,以下约定对任何向量 a,用 $\| a \|$ 表示 Euclidean 模。

A1:随机变量 U 具有有界支撑,其密度函数 $f(\cdot)$ 满足 Lipschitz 连续,且 $f(\cdot) > 0$。

A2:$\{g_j(\cdot), j = 1, 2, \cdots, q\}$ 在 $U \in \Omega$ 内有二阶连续导数。

A3:$K(\cdot)$ 为对称的概率密度函数且具有紧支撑。宽窗 $h \to \infty$ 时,$\frac{nh^2}{(logn)^2} \to \infty, nh^8 \to 0$。

A4:对每一个 $U \in \Omega$,矩阵 $\Gamma(U) = E(Z_1 Z_1^{\tau} \mid U)$ 是非退化的,$E(X_1 X_1^{\tau} \mid U)$,$\Gamma^{-1}(U)$ 和 $\Phi U \triangleq EZ_1 X_1^{\tau} \mid U$ 均为 Lipschitz 连续。

A5:存在常数 $s > 2$ 使得 $E\| X_1 \|^{2s} < \infty, E\| Z_1 \|^{2s} < \infty, E\| e_1 \|^{2s} < \infty, E\| \varepsilon_1 \|^{2s} < \infty$,对某个 $\delta < 2 - s^{-1}$,当 $n \to \infty$ 时,有 $n^{2\delta-1}h \to \infty$。

定理 1 假设条件 A1 ~ A5 成立,当参数 β 是真参数时,有 $\hat{l}_n(\beta) \xrightarrow{d} w_1\chi_{1,1}^2 + w_2\chi_{1,2}^2 + \cdots + w_p\chi_{1,p}^2$,其中的$\xrightarrow{d}$表示依分布收敛,$w$ 是 $\Sigma_1^{-14}(\beta)\Sigma(\beta)$ 的特征值,$\chi_{1,1}^2, \chi_{1,2}^2, \cdots, \chi_{1,p}^2$ 是相互独立的自由度为 1 的标准 χ^2 随机变量。

设 A_n 表示 A 的 Kaplan-Meier 估计,记

$$\hat{\Sigma}_1(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)\hat{\eta}_i^{\tau}(\beta), H(s) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}((I - S)X_{it})Y_{itB}I(s < \zeta_{it})}{(1 - A_n(s-))(1 - B_n(s))},$$

$$\Lambda^{B_n}(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\frac{(1 - \delta_{it})I(\zeta_{it} \leqslant s)}{(1 - A_n(s-))(1 - B_n(s))},$$

$$\hat{\Sigma}_2(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(I - \delta_{it})H_n(\zeta_{it})H_n(\zeta_{it})^{\tau}(1 - \Delta\Lambda^{B_n}(\zeta_{it}-)),$$

$$\hat{\Sigma}(\beta) = \hat{\Sigma}_1(\beta) - \hat{\Sigma}_2(\beta), M(\beta) = \left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)\right)^{\tau}。$$

调整后的经验似然函数定义为

$$\hat{l}_{n.ad}(\beta) = \gamma_n(\beta)\hat{l}_n(\beta),$$

式中,$\gamma_n(\beta) = \frac{tr(\hat{\Sigma}^{-1}(\beta)M(\beta))}{tr(\hat{\Sigma}_1^{-1}(\beta)M(\beta))}$,$tr$ 表示矩阵的迹运算。

定理 2 假设条件 A1 ~ A5 成立，如果 β 是真参数时，有 $\hat{l}_{n.ad}(\beta)\xrightarrow{d}\chi_p^2$。在定理 2 的情形下，可以令参数向量 β 的 $1-\alpha$ 置信域对任意情况的 $0<\alpha<1$，存在 c_α 使得 $P\{\chi_p^2>c_\alpha\}=\alpha$，则

$$I_\alpha(\beta)=\{\beta\mid \hat{l}_{n.ad}(\beta)\leqslant c_\alpha\},$$

$I_\alpha(\beta)$ 是参数向量 β 的置信域，这里的置信域是在具有趋近置信水平 $1-\alpha$ 的情况下，而且还有 $P(\beta\in I_\alpha(\beta))=\alpha+o(1)$。

2 定理的证明

为了下文叙述方便，令

$$c_n=\{(nh)^{-1}log(n)\}^{\frac{1}{2}},\tilde{\varepsilon}=(I-S)\varepsilon,\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}u^kK(u)du,v_k=\int_{-\infty}^{+\infty}u^kK^2(u)du,k=0,1,2,4,$$

并且以下假设中 c 表示常数，在各处所取的取值不同。令

$$N_{it}(u,k)=K\left(\frac{U_{it}-u}{h}\right)\left(\frac{U_{it}-u}{h}\right)^kZ_{itj_1}Z_{itj_2},$$

$$W_{it}(u,k)=K\left(\frac{U_{it}-u}{h}\right)\left(\frac{U_{it}-u}{h}\right)^kZ_{itj}e_{itj}^k,$$

$$R_{it}(u,k)=K\left(\frac{U_{it}-u}{h}\right)\left(\frac{U_{it}-u}{h}\right)^kZ_{itj}\varepsilon_{it}。$$

引理 1 在条件 A1 ~ A5 成立下，当 $n\to\infty$ 时有

$$\sup_{U\in\Omega}\left|\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n\sum_{t=1}^TN_{it}(u,k)-f(U)\Gamma_{j_1j_2}(U)\mu_k\right|=O\left\{h^2+\left(\frac{logn}{nh}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}a.s.,$$

$$\sup_{U\in\Omega}\left|\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n\sum_{t=1}^TR_{it}(u,k)\right|=O\left\{\left(\frac{logn}{nh}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}a.s.,$$

$$\sup_{U\in\Omega}\left|\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n\sum_{t=1}^TW_{it}(u,k)\right|=O\left\{\left(\frac{logn}{nh}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}a.s.,$$

式中，$j,j_1,j_2=1,2,\cdots,q$，$\Gamma_{j_1j_2}(U)$ 是矩阵 $\Gamma(U)$ 的第 (j_1,j_2) 元素。

证明 类似于文献[21] 中引理 A2 的证明。

引理 2 在条件 A1 ~ A5 成立下，有

$$(D_u^W)^\tau\omega_UD_U^W-\Omega=nf(U)\Gamma(U)\otimes\begin{pmatrix}1&\mu_1\\\mu_1&\mu_2\end{pmatrix}\{1+O_p(c_n)\},$$

$$(D_u^W)^\tau\omega_UX=nf(U)\Phi(U)\otimes(1\quad\mu_1)\{1+O_p(c_n)\}。$$

证明 类似于文献[22] 中引理 A2 的证明。

引理 3 在条件 A1 ~ A5 成立下，当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{1}{n}\widetilde{X}^\tau\widetilde{X}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX^\tau Q_{it}^\tau\Sigma_eQ_{it}X\to\Sigma_1a.s.,$$

式中，$\Sigma_1=E(X_1X_1^\tau)-E(\Phi^\tau(U_1)\Gamma^{-1}(U_1)\Phi(U_1))$。

证明 类似于文献[22] 中引理 A3 的证明。

引理 4 在条件 A1 ~ A5 成立下，有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\hat{\eta}_i(\beta)\xrightarrow{d}N(0,\Sigma(\beta)),\tag{10}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\hat{\eta}_i(\beta)\hat{\eta}_i^\tau(\beta)-\Sigma(\beta)=o_p(1),\tag{11}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\hat{\eta}_i(\beta)\|=o_p(n^{\frac{1}{2}})。\tag{12}$$

证明 由泰勒展开，容易得到

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\hat{\eta}_i(\beta)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\sum_{t=1}^TL_{1nT}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\sum_{t=1}^TL_{2nT},$$

式中，$L_{1nT}=\widetilde{X}_{it}(\widetilde{Y}_{itB_n}-\widetilde{X}_{it}^{\tau}\beta)-X^{\tau}Q_{it}^{\tau}\Sigma_eQ_{it}(Y_{B_n}-X\beta)$，$L_{2nT}=\widetilde{X}_{it}(\widetilde{Y}_{itB_n}-\widetilde{Y}_{itB})$。

首先证明，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}L_{1nT}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(\widetilde{X}_{it}(\widetilde{Y}_{itB_n}-\widetilde{X}_{it}^{\tau}\beta)-X^{\tau}Q_{it}^{\tau}\Sigma_eQ_{it}(Y_{B_n}-X\beta))=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}[\widetilde{X}_{it}(\widetilde{Z}_{it}^{\tau}g(U_{it})+\tilde{\varepsilon}_{it})-X^{\tau}Q_{it}^{\tau}\Sigma_eQ_{it}(M+\varepsilon)]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}[X_{it}-\Phi^{\tau}(U_{it})\Gamma^{-1}(U_{it})W_{it}(1+O_p(c_n))]\times$$

$$\{\varepsilon_{it}+O_p(c_n)\|W_{it}\|+Z_{it}^{\tau}g(U_{it})O_p(c_n)-e_{it}^{\tau}g(U_{it})(1+O_p(c_n))\}-$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\{\Phi^{\tau}(U_{it})\Gamma^{-1}(U_{it})\Sigma_eg(U_{it})(1+O_p(c_n))+\Phi^{\tau}(U_{it})\Gamma^{-1}(U_{it})\Sigma_e1_qO_p(c_n)\}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\{[X_{it}-\Phi^{\tau}(U_{it})\Gamma^{-1}(U_{it})Z_{it}][\varepsilon_{it}-e_{it}^{\tau}g(U_{it})]-\Phi^{\tau}(U_{it})\Gamma^{-1}(U_{it})e_{it}\varepsilon_{it}+$$

$$\Phi^{\tau}(U_{it})\Gamma^{-1}(U_{it})(e_{it}e_{it}^{\tau}-\Sigma_e)g(U_{it})\}+o_p(1)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\beta)+o_p(1)。$$

由中心极限定理可得，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}L_{1nT}\xrightarrow{d}N(0,\Sigma_1(\beta))。$$

接下来可证

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}L_{2nT}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\widetilde{X}_{it}(\widetilde{Y}_{itB_n}-\widetilde{Y}_{itB})=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\frac{(X_{it}-E(W_{it}W_{it}^{\tau}\mid U_{it})E(W_{it}W_{it}^{\tau}\mid U_{it})W_{it})\delta_{it}\zeta_{it}}{1-B(\zeta_{it})}\frac{B_n(\zeta_{it})-B(\zeta_{it})}{1-B(\zeta_{it})}+o_p(1)。$$

类似于侯文[7]的引理 4.4 的证明，可知

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}L_{2nT}\xrightarrow{d}N(0,\Sigma_2(\beta))。$$

由以上证明可知式(10)成立。

类似于侯文[7]的引理 4.7 的证明，可得式(11)成立。

由引理 1 以及条件 A5 可得到

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\hat{\eta}_i(\beta)\|\leqslant$$

$$(\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant t\leqslant T}\|X_{it}\|+\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant t\leqslant T}\|\Phi^{\tau}(U_{it})\Gamma^{-1}(U_{it})W_{it}\|+O_p(c_n)\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant t\leqslant T}\|W_{it}\|)\times$$

$$(\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant t\leqslant T}\|\varepsilon_{it}\|+O_p(c_n)\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant t\leqslant T}\|W_{it}\|+O_p(c_n)\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant t\leqslant T}|Z_{it}^{\tau}g(U_{it})|)+$$

$$O_p(c_n)\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant t\leqslant T}\|\Phi^{\tau}(U_{it})\Gamma^{-1}(U_{it})\Sigma_u1_q\|=o_p(n^{\frac{1}{2}}),$$

从而式(12)成立。

定理 1 的证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\eta}_i(\beta)}{1+\lambda^{\tau}\hat{\eta}_i(\beta)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda\hat{\eta}_i(\beta)\hat{\eta}_i^{\tau}(\beta)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\eta}_i(\beta)[\lambda^{\tau}\hat{\eta}_i(\beta)]^2}{1+\lambda^{\tau}\hat{\eta}_i(\beta)},$$

然后由引理 4 得到

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\hat{\eta}_i(\beta)\|^3\|\lambda\|^2|1+\lambda^{\tau}\hat{\eta}_i(\beta)|^{-1}\leqslant O_p(n^{-1})\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\hat{\eta}_i(\beta)\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\hat{\eta}_i(\beta)\|^2=$$

$$o_p(n^{-\frac{1}{2}})\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)\hat{\eta}_i^{\tau}(\beta)\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)+o_p(n^{-\frac{1}{2}}),$$

从而

$$\hat{l}_n(\beta)=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)\right)^{\tau}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)\hat{\eta}_i^{\tau}(\beta)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\eta}_i(\beta)\right)+o_p(1),$$

再结合引理4,此定理可证。

定理2的证明:类似于文献[8]中定理2的证明可得。

3 结束语

近年来随着社会经济的迅猛发展,科研的不断深入,人们所收集到的面板数据越来越丰富,如何准确地处理和分析这些数据是目前统计学者们面临的一个大的研究课题。当半参数变系数部分线性EV模型应用在生存数据的分析时会面临一些困难,因为生存数据通常情况下都会是删失的。研究把经验似然方法推广到删失下带有EV的半参数变系数面板数据模型中,通过得到的统计量的趋近性质,说明了经验似然方法在删失下带有EV的半参数变系数面板数据模型中是有效的,为研究删失下带有EV的半参数变系数面板数据模型提供了一种方法与思路。

参考文献:

[1] YOU J H,CHEN G.Estimation of a semiparametric varying-coefficient partially linear errors-in-variabless model[J].Journal of multivariate analysis,2006,97(2):341-342.

[2] 冯三营,裴丽芳,薛留根.非参数部分带有EV(errors-in-variables)的部分线性变系数模型的经验似然推断[J].系统科学与数学,2011,31(12):1 652-1 663.

[3] 陈夏,郭韫华,何军伟.半参数变系数部分线性EV模型的惩罚经验似然[J].纯粹数学与应用数学,2020,36(3):253-269.

[4] WANG Q H,ZHENG Z.Asymptotic properties for the semiparametric regression model with randomly censored data[J].Science in china series a mathematics,1997,40(9):945-957.

[5] WANG Q H,LI G R.Empirical likelihood semiparametric regression analysis under random censorship[J].Journal of multivariate analysis,2002,83(2):469-486.

[6] 陈放,李高荣,冯三营,等.右删失下非线性回归模型的经验似然推断[J].应用数学学报,2010,33(1):130-141.

[7] 侯文.删失下若干半参数模型的经验似然与惩罚经验似然推断[D].大连:大连理工大学,2013.

[8] 刘强,薛留根,陈放.删失下部分线性EV模型中参数的经验似然置信域[J].数学学报,2009,52(3):549-560.

[9] 李芸.基于区间删失数据的半参数分位数回归模型的统计推断[D].长春:长春工业大学,2021.

[10] 闫一冰,关静.删失数据下部分线性测量误差模型的统计推断[J].天津理工大学学报,2019,35(4):47-52.

[11] 史功明,张忠占,谢田法.响应变量删失时函数型部分线性分位数回归模型的估计[J].数学的实践与认识,2021,51(3):152-166.

[12] 董小刚,刘新蕊,王纯杰,等.右删失数据下加速失效模型的贝叶斯经验似然[J].数理统计与管理,2020,39(5):838-844.

[13] JIN J,MA T F,DAI J J,et al.Penalized weighted composite quantile regression for partially linear varying coefficient models with missing covariates[J].Computational statistics,2020(prepublish):541-575.

[14] LIN F Z,TANG Y L,ZHU Z Y.Weighted quantile regression in varying-coefficient model with longitudinal data[J].Computational statistics and data analysis,2020,145(C):1-21.

[15] 毕琳.变系数部分线性误差变量模型的估计与应用[D].哈尔滨:东北林业大学,2020.

[16] 向行.半参数变系数部分线性模型的经验似然推断方法[D].长沙:湖南师范大学,2020.

[17] CHOI TAEHWA,KIM K H,ARLENE,et al.Semiparametric least-squares regression with doubly-cen sored data[J].Computational statistics & data analysis,2021(prepublish):1-11.

[18] WEI L,DAI H S.Empirical likelihood based on synthetic right censored data[J].Statistics and probability letters,2021,169:1-8.

[19] FENG S,XUE L.Bias-corrected statistical inference for partially linear varying coefficient errors-in-variabless models with restricted condition[J].Ann Inst.Stat.Math,2014,66:121-140.

[20] OWENA.Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional[J].Biometrika,1988,75(2):237-249.

[21] XIA Y C,LI W K.On the estimation and testing of functional-coefficient linear models[J].Statistica sinica,1999,9(3):735-757.

[22] FAN J Q, HUANG T. Profile likelihood inferences on semiparametric varying-coefficient partially linear models[J]. Bernoulli, 2005, 11(6): 1 031-1 057.

Empirical Likelihood of Semiparametric Varying Coefficient Panel Model with Errors-in-Variables Under Censored Data

LI Wenbin, HE Bangqiang*
(School of Mathematics, Physics and Finance, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China)

Abstract: This paper considers the semiparametric variable coefficient panel data model with Errors-in-Variables in the case of deletion, and considers that the explanatory variables in the nonparametric part contain (Errors-in-Variables, EV). In this case, the general empirical log likelihood ratio statistics will have error disturbance. Here, the empirical log likelihood ratio statistics for the adjustment of unknown parameters under deletion are constructed, and it is proved that under appropriate conditions, the proposed statistics obey the approaching chi square distribution, and the results can be used to construct the confidence region of unknown parameters.

Key words: censored data; Errors-in-Variables; panel data; empirical likelihood; asymptotic chi-square distribution

(上接第 38 页)

Improved Sliding Mode Position Control Algorithm for Permanent Magnet Synchronous Motor

YANG Dongxue, LU Huacai*
(School of Electrical Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China)

Abstract: To solve the singularity and the chattering problem of terminal sliding mode control, a nonsingular continuous terminal sliding mode control algorithm has been put forward with the algorithm based on fuzzy control and linear auto disturbance rejection technology. In this algorithm, the control method of system current loop has been changed to linear active disturbance rejection control, and fuzzy control has been used to adjust the switching gain of sliding mode reaching law in real time to obtain the input current of linear active disturbance rejection controller, and the input voltage of anti-park transformation has been obtained by linear active disturbance rejection controller to adjust the output position of the motor. Then, it is compared with the reference position and fed back to the system to obtain accurate tracking performance. In addition, the sliding mode control replaces the switching function with a continuous function, which reduces the chattering phenomenon of the system. On this basis, the controller is simulated, and the results show that the control algorithm can accurately and stably track the reference position under the conditions of no-load and disturbance. The feasibility and effectiveness of the algorithm are verified.

Key words: permanent magnet synchronous motor; terminal sliding mode control; linear active disturbance rejection control; fuzzy control; non-singularity; robustness