关于对称矩阵与反对称矩阵的若干性质

华北电力大学科技学院　　朱亚茹

摘　要：对称矩阵与反对称矩阵是矩阵论中经常用到的两个特殊矩阵，占有很重要的地位，但在高等代数和线性代数教材中只涉及到了两个矩阵的定义，而没有提到其性质。本文针对对称矩阵和反对称矩阵给出了其主要性质并加以了证明。

关键词：对称矩阵　反对称矩阵　性质

对称矩阵与反对称矩阵是矩阵论中经常用到的两个特殊矩阵，在高等代数和线性代数中占有重要地位。教材中在讨论对称矩阵时只给出了定义，但对其性质的研究很少，对反对称矩阵的性质则研究更少。本文围绕对称矩阵和反对称矩阵给出了其主要性质并加以证明，为广大读者学习矩阵时提供参考。

一、对称矩阵

定义：设 $A=(a_{ij})_n$ 为 n 阶方阵，如果满足 $A^T=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，那么称 A 为对称矩阵。

由于对称矩阵形式的特殊性，使其具有一般矩阵没有的性质，下面列举出对称矩阵一系列的性质，并运用对称矩阵的定义和转置运算的性质对每个性质进行了证明。

性质 1：A 为 n 阶对称矩阵，则 A^m（m 为正整数）也是对称矩阵。

证明：因为 A 为 n 阶对称矩阵，所以 $A^T=A$。则 $(A^m)^T=(A^T)^m=A^m$，所以由定义可知 A^m（m 为正整数）也是对称矩阵。

性质 2：A 为 n 阶对称矩阵，则 $A+A^T$ 也是对称矩阵。

证明：因为 $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A+A^T$，所以 $A+A^T$ 也是对称矩阵。

性质 3：A 为 n 阶对称矩阵且 A 可逆，则 A^{-1} 也是对称矩阵。

证明：因为 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，所以 A^{-1} 也是对称矩阵。

性质 4：A 为 $m\times n$ 阶的矩阵，则 AA^T 为 m 阶对称阵，A^TA 为 n 阶对称阵。

证明：显然 AA^T 为 m 阶矩阵，A^TA 为 n 阶矩阵，又由于 $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$，$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$，所以 AA^T 为 m 阶对称阵，A^TA 为 n 阶对称阵。

性质 5：A, B 都为 n 阶对称矩阵，则 $A+B$ 也是对称矩阵。

证明：因为 $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，所以 $A+B$ 也是对称矩阵。

性质 6：A, B 都为 n 阶对称矩阵，则 AB 也是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$。

证明：必要性：设 AB 为对称矩阵，则 $(AB)^T=AB$，而 $(AB)^T=B^TA^T=BA$，所以 $AB=BA$。

充分性：设 $AB=BA$，则 $(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB$，所以 AB 为对称矩阵。

二、反对称矩阵

定义：设 $A=(a_{ij})_n$ 为 n 阶方阵，如果满足 $A^T=-A$，即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，那么称 A 为反对称矩阵。

由于反对称矩阵形式的特殊性，使其具有了与对称矩阵不同的一些性质。

性质 7：设 A 为 n 阶反对称矩阵，则 A 的主对角线上的元素都为 0。

证明：因为 A 为 n 阶反对称矩阵，所以 A 的主对角线上的元素有 $a_{ii}=-a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$。

性质 8：设 A 为 n 阶反对称矩阵，n 为奇数，则 A 的行列式值为 0。

证明：因为 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，所以将 A 的每一行提出一个公因子 -1，由于 n 为奇数，则：$|A|=(-1)^n|A^T|=-|A^T|$。而根据行列式的性质有 $|A^T|=|A|$，所以 $|A|=0$。

性质 9：设 A 为 n 阶对称矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，则（1）$AB-BA$ 为对称矩阵。（2）$AB+BA$ 为反对称矩阵。

证明：（1）因为 $(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=AB-BA$，所以 $AB-BA$ 为对称矩阵。

（2）同（1），因为 $(AB+BA)^T=(AB)^T+(BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=-(AB+BA)$，所以 $AB+BA$ 为反对称矩阵。

性质 10：任一 n 阶方阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和。

证明：假设 n 阶方阵 $A=B+C$，其中 B 为对称矩阵，C 为反对称矩阵，则 $A^T=(B+C)^T=B^T+C^T=B-C$。由 $\begin{cases}A=B+C\\A^T=B-C\end{cases}$ 得 $B=\dfrac{A+A^T}{2},C=\dfrac{A-A^T}{2}$。

而 $B^T=(\dfrac{A+A^T}{2})^T=\dfrac{A+A^T}{2}=B,C^T=(\dfrac{A-A^T}{2})^T=\dfrac{A^T-A}{2}=-C$，则 B 为对称矩阵，C 为反对称矩阵，且 $A=B+C$。

性质 11：设 A 为 n 阶反对称矩阵，B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 为反对称矩阵的充分必要条件为 $AB=BA$。

证明：必要性：设 AB 为反对称矩阵，则 $(AB)^T=-AB$，而 $(AB)^T=B^TA^T=-BA$，所以 $AB=BA$。

充分性：设 $AB=BA$，则 $(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=-AB$，所以 AB 为反对称矩阵。

三、结束语

对称矩阵与反对称矩阵在高等代数和线形代数中的性质还有很多，比如对称矩阵的特征值均为实数，对应不同特征值得的特征向量必正交等等，由于篇幅所限，本文只介绍一些基本的性质，方便读者参考。

参考文献：

[1] 同济大学应用数学系：《线性代数》. 高等教育出版社, 2004

[2] 肖马成、周概容：《线性代数、概率论与数理统计证明题 500 例解析》. 高等教育出版社, 2008

[3] 陈惠汝、余巧生：《矩阵同时相似于对角矩阵问题的研究》[J]. 重庆三峡学院学报, 2009，25