第 24 卷 第 1 期
2021 年 1 月

高 等 数 学 研 究
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 24, No. 1
Jan., 2021

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2021.01.007

利用特征矩阵求实对称矩阵的特征向量

孟宪萌，牛　柯
（山东财经大学 数学与数量经济学院，山东 济南 250014）

摘　要　本文利用 Hamilton-Cayley 定理和特征矩阵的性质，给出了求实对称矩阵的特征向量的新方法，并通过例子验证了该方法.

关键词　Hamilton-Cayley 定理；特征向量；特征矩阵

中图分类号　O151.2　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008－1399(2021)01－0021－03

Using Eigenmatrices to Find Eigenvectors of a Real Symmetric Matrix

MENG Xianmeng and NIU Ke
(Department of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)

Abstract　This paper proposes a new method to obtain the eigenvectors of a real symmetric matrix by applying Hamilton-Cayley theorem and some properties of eigenmatrices. Examples are given to verify the method.

Keywords　Hamilton-Cayley theorem, eigenvector, eigenmatrix

1　引言

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵，定义 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称 $f(\lambda)=0$ 为特征方程，称其根 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 若非零向量 $\boldsymbol{v}_i$ 满足 $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\,\boldsymbol{v}_i$，则称 $\boldsymbol{v}_i$ 是对应于特征值 λ_i 的特征向量. 称矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为特征矩阵.

本文介绍一种利用特征矩阵的性质求特征向量的方法，并举例应用该方法求 3 阶实对称矩阵的特征向量. 求解特征向量的传统方法是解线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 求对应于特征值 λ_i 的特征向量，本文将要介绍的方法不必解方程组.

2　特征向量的计算

2.1　对应于单特征值的特征向量

定理 1　设 λ_1 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值，其余特征值为 $\lambda_i(i=2,3,\cdots,n)$. 令矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $n-1$ 个特征矩阵的乘积，即

$$\boldsymbol{B}=\prod_{j=2}^{n}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

则 (1) 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的任一非零列向量都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_1 的特征向量；

(2) 若对应于 λ_1 的单位特征向量为

$$\boldsymbol{v}_1=(v_{11},v_{12},\cdots,v_{1n})^{\mathrm{T}},$$

若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对角线上的元素记为 $b_{kk}(k=1,2,\cdots,n)$，

收稿日期：2020－04－14　　修改日期：2020－06－08
作者简介：孟宪萌(1971－)，女，博士，山东临清人，从事数学教学与研究，Email：mengxm@sdufe.edu.cn.
牛柯(1996－)，男，山东邹城人，硕士研究生，从事数量经济学研究，Email：975899370@qq.com.

那么

$$b_{kk}=\prod_{j=2}^{n}(\lambda_j-\lambda_1)v_{1k}^2\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

证明 (1)由已知,矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-\lambda_j)$,由 Hamilton-Cayley 定理[1]得

$$f(\boldsymbol{A})=\prod_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}.$$

即 $\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均为方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的解向量,故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的任一非零列向量都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_1 的特征向量.

(2)由实对称矩阵的性质,存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,可使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化[2],即

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda},$$

且 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)$,其中 $\boldsymbol{v}_i$ 为对应于 λ_i 的特征向量 $(i=1,2,\cdots,n)$. 由此可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}&=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\prod_{j=2}^{n}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}\\&=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}\cdots\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\lambda_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}\\&=\prod_{j=2}^{n}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda})=\begin{bmatrix}\prod_{j=2}^{n}(\lambda_j-\lambda_1)&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\prod_{j=2}^{n}(\lambda_j-\lambda_1)&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\prod_{j=2}^{n}(\lambda_j-\lambda_1)\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

由上式两端的矩阵对角线上的元素相等,可得结论成立.

例1 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$ 的特征向量,并求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)=0,$$

特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

方法一:应用定理1(1),求特征矩阵乘积的非零列. 以下过程中,矩阵乘积的第一列即为非零列,计算较简单.

当 $\lambda_1=-2$ 时,

$$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{bmatrix},$$

只需计算积矩阵的第一列为 $(2,4,4)^{\mathrm{T}}$,即为对应于 $\lambda_1=-2$ 的特征向量. 可将该特征向量乘以0.5简化为 $(1,2,2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=1$ 时,

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{bmatrix},$$

上面积矩阵的第一列为 $(-4,-2,4)^{\mathrm{T}}$,即为对应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量,该特征向量也可以简化为 $(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=4$ 时,

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{bmatrix},$$

积矩阵的第一列为 $(8,-8,4)^{\mathrm{T}}$,即为对应于 $\lambda_3=4$ 的特征向量,该特征向量也可以简化为 $(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

方法二:应用定理1(2),直接求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准正交向量组.

当 $\lambda_1=-2$ 时,

$$\boldsymbol{B}=(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{bmatrix},$$

简单计算可得上面的积矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对角线上的元素为 $b_{11}=2,b_{22}=8,b_{33}=8$. 由定理1(2)得

$$v_{11}^2=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}b_{11}=\frac{1}{9},$$

$$v_{12}^2=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}b_{22}=\frac{4}{9},$$

$$v_{13}^2=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}b_{33}=\frac{4}{9}.$$

即 $\boldsymbol{v}_1=(v_{11},v_{12},v_{13})^{\mathrm{T}}$ 代入 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\boldsymbol{v}_1$ 验证 v_{1i} 的符号，可得 $\boldsymbol{v}_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

同理，可求得 $\boldsymbol{v}_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_3=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$. 上述三个向量为矩阵 A 的标准正交向量组，故所求正交矩阵 Q 为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

满足

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}.$$

2.2　对应于重特征值的特征向量

定理 2　设 λ_1 是实对称矩阵 A 的 r 重特征值，其余特征值为 $\lambda_i(i=r+1,r+2,\cdots,n)$. 令矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为 $n-r$ 个特征矩阵的乘积，即

$$\boldsymbol{C}=\prod_{j=r+1}^{n}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

则矩阵 C 的列向量组的一个极大无关组是矩阵 A 的对应于特征值 λ_1 的 r 个线性无关的特征向量.

证明　由实对称矩阵的性质，存在正交矩阵 Q，可使矩阵 A 对角化[2]，即

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_1&&&\\&&&\lambda_{r+1}&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&\lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda},$$

由此得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\prod_{j=r+1}^{n}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}$$

$$=(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda})\prod_{j=r+1}^{n}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda})=O.$$

故 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\prod_{j=r+1}^{n}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

从而矩阵 C 的非零列向量是对应于特征值 λ_1 的特征向量，将矩阵 C 对角化易知 C 的秩为 r，结论由此得证.

例 2　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ 的特征向量.

解　矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&-1\\-1&\lambda-4&-1\\-1&-1&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)^2(\lambda-6)=0,$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，容易计算

$$\boldsymbol{C}=\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}.$$

矩阵 C 的列向量组的一个极大无关组是 $(2,-1,-1)^{\mathrm{T}},(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，即对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的两个线性无关的特征向量是

$$\boldsymbol{v}_1=(2,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}_2=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_3=6$ 时，计算矩阵

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$$

的第一列为 $(3,3,3)^{\mathrm{T}}$，即为对应于 $\lambda_3=6$ 的特征向量，也可以乘以 $1/3$ 简化为 $\boldsymbol{v}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

3　结论

不同于传统方法中通过解线性方程组求矩阵的特征向量，本文利用 Hamilton-Cayley 定理和特征矩阵的性质，得到了求实对称矩阵的特征向量的新方法，并通过例子验证了这种方法在计算 3 阶矩阵的特征向量时是有效的，通常线性代数教材中计算矩阵的特征向量也是以 3 阶矩阵为例[3]. 事实上，当矩阵阶数较高时，也可以利用矩阵相乘的某些快速算法来实现，注意这里求的只是乘积矩阵对角线上的元素或非零列，可减少计算量.

参考文献

[1]　北京大学数学系前代数小组编，王萼芳，石生明修订. 高等代数[M]. 第 4 版. 北京：高等教育出版社，2013.

[2]　刘建亚，吴臻，秦静，金辉，傅国华. 线性代数[M]. 第 3 版. 北京：高等教育出版社，2018.

[3]　郝秀梅，姜庆华. 线性代数[M]. 第 4 版. 北京：经济科学出版社，2017.