实对称矩阵特征值的性质及其应用

◎杨　召　李春利　(河南商丘学院　476113)

【摘要】本文首先论证实对称矩阵特征值的几个相关性质,然后通过这几个性质,说明在二次型和随机系统稳定性方面的应用.

【关键词】对称矩阵; 特征值; 二次型; 稳定性

性质 1: 实对称矩阵的特征值都是实数.

证明: 可以利用反证法给出证明,设复数 λ 是实对称矩阵的特征值,复向量 x 为对应的特征向量,故有

$Ax = \lambda x$,其中 $x \neq 0$.

用 $\overline{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数,$\overline{x}$ 表示的 x 共轭复向量,故有

$A\overline{x} = \overline{A}\overline{x} = (\overline{Ax}) = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x}$.

又有 $\overline{x}'Ax = \overline{x}'\lambda x = \lambda\overline{x}'x$ 和 $\overline{x}'Ax = (\overline{x}'A')x = (A\overline{x})'x = (\overline{\lambda}\overline{x})'x = \overline{\lambda}\overline{x}'x$,

由两式相减,得 $(\lambda - \overline{\lambda})\overline{x}'x = 0$,因 $x \neq 0$,

故 $\overline{x}'x = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}'_i x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$.

可得 $\lambda - \overline{\lambda} = 0$,证得 λ 是实数.

性质 2: 设 a,b 是实对称矩阵的两个不相等的特征值,η,ξ 是对应的特征向量,则向量 η,ξ 是正交的.

证明: 由 $a\eta = A\eta$,$b\xi = A\xi$,且 $a \neq b$,A 对称,可得

$a\eta^T = (a\eta)^T = (A\eta)^T = \eta^T A^T = \eta^T A$,

则 $a\eta^T\xi = \eta^T A\xi = \eta^T b\xi = b\eta^T\xi$,

于是有: $(a-b)\eta^T\xi = 0$,但是 $a \neq b$,所以 $\eta^T\xi = 0$,即得 η,ξ 是正交的.

性质 3: 若 A 是实对称矩阵,则必存在正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP = \Lambda$,其中 Λ 是以 A 的特征值为对角元素的对角矩阵.

性质 4: 实对称矩阵的所有特征值之和等于实对称矩阵的主对角线元素之和,所有特征值之积等于实对称矩阵所对应的行列式.

主要应用:

应用 1: 实对称矩阵特征值的性质应用之一就是关于二次型方面的应用,可以利用性质解决该方面的问题.

例　(考研试题) 已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 可以经过正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\xi^2 = 4$,求 a,b 的值和正交矩阵.

该题可以将二次型方程所对应的实对称矩阵 A 写出来,它的特征值分别为 0,1,4. 于是可以利用上述性质 4 得到 a,b 的值.

诸如此类的试题,我们都可以利用特征值的性质给出解决方案.

应用 2: 主要利用特征值来讨论随机系统的稳定性.

针对随机系统 $dx = A(x)dt + B(x)dt$,讨论该随机系统稳定性时,常用特征值的知识.

定义算子 $L(\cdot)$为: $x \in S^n \mid_{\rightarrow} XA + A^TX + B^TXB$.

其中 S^n 为一切对称矩阵的集合,则算子 $L(\cdot)$的特征值为随机系统的谱.

上述随机系统均方稳定的充分条件是存在正定矩阵 $P > 0$,$\lambda > 0$,使得 $PA + A^TP + B^TPB < -\lambda B_I$.

其中 B_I 为 B 的正交补空间,λ 为对称矩阵的特征值.

也就是说,随机系统均方稳定性可用映射算子的谱(特征值)来表示.

【参考文献】

[1] 戴斌祥. 线性代数 [M]. 北京: 北京邮电大学出版社,2009.

[2] 张维海,袁富宇. 随机系统均方稳定性的 Lyapunov 型方程. 1998.

[3] 王萼芳,石生明. 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组. 高等代数 [M]. 北京: 高等教育出版社,1988:68-96.