# 实对称矩阵的性质及其应用

薛建明[1] 胡兴凯[2(通讯作者)]
(1.昆明理工大学津桥学院 云南 昆明 650106 2.昆明理工大学理学院 云南 昆明 650500)

【摘要】实对称矩阵实一类特殊的方阵,是线性代数或是高等代数课程教学过程中的重点和难点之一,本文梳理了实对称矩阵的性质,给出了实对称矩阵在主成分分析法中的应用,最后给出了例子来展示主成分分析法的运用,丰富了实对称矩阵的教学内容。

【关键词】实对称矩阵 主成分分析 综合评价
【基金项目】2019 年云南省教育厅科学研究基金项目“矩阵奇异值与酉不变范数不等式的研究”(项目编号:2019J0350)。
【中图分类号】O178;O177.1 【文献标识码】A 【文章编号】2095-3089(2021)40-0158-02

## 一、实对称矩阵的定义及其性质

在学习综合评价和机器学习等课程的学习过程中,难免会与矩阵打交道,而实对称矩阵更是其中常用的一类特殊矩阵。虽然实对称矩阵的定义比较简单:若实矩阵 A 满足 $A^T=A$,则我们称其为实对称矩阵,但实对称矩阵具有非常好的性质[1-3]:

(1)实对称矩阵 A 的特征值都是实数,特征向量都是实向量。

(2)实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量是正交的。

(3)实对称矩阵 A 可相似对角化且其特征值为相似对角化矩阵对角线的元素。

(4)设 λ 是 A 的重特征值,则其几何重数等于代数重数。

(5)实对称矩阵 A 一定可正交相似对角化。

(6)设 A 的特征值为 $\lambda_n\leqslant\cdots\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1$,则对于任意的 $x\in R^n$,都有:

$$\lambda_n x^T x\leqslant x^T A x\leqslant\lambda_1 x^T x$$

## 二、实对称矩阵的应用

主成分分析是一种降维方法,其思路是利用数学方法找出几个新的变量来替代原来线性相关的变量,同时尽可能地代表原来变量的信息[4]。主成分分析的处理方法是将原来的变量做线性组合,作为新的综合变量,首先将选取的第一个线性组合即第一个综合变量记为 $F_1$,自然的我们希望它尽可能多的反映原来变量的信息,这里“信息”用方差来测量,即希望 $Var(F_1)$越大,表示 $F_1$ 包含的信息越多。如果第一主成分不足以代表原来 n 个变量的信息,再考虑选取第二主成分 $F_2$,为了有效的反映原来信息,$F_1$ 已有的信息就不需要再出现在 $F_2$ 中,用数学语言表达就是要求 $Cov(F_1,F_2)=0$,依此类推可以构造出第三、四……第 p 个主成分。

对于一个样本资料,观测 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,m 个样品的数据资料阵为:

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}\end{pmatrix}=(x_1,x_2,\cdots x_n)$$

$$\text{其中}:x_j=\begin{pmatrix} x_{1j}\\ x_{2j}\\ \vdots\\ x_{mj}\end{pmatrix},j=1,2\cdots n$$

主成分分析就是将 n 个观测变量综合成为 n 个新的变量(综合变量),即

$$\begin{cases} F_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ F_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \quad\cdots\\ F_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases}$$

简写为:

$$F_j=\alpha_{j1}x_1+\alpha_{j2}x_2+\cdots+\alpha_{jn}x_n,j=1,2,\cdots,n$$

要求成分之间满足以下条件:

①$F_i,F_j$ 互不相关$(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$

②$F_1$ 的方差大于 $F_2$ 的方差大于 $F_3$ 的方差,依次类推

③$a_{k1}^2+a_{k2}^2+\cdots+a_{kn}^2=1,k=1,2,\cdots n.$

利用矩阵乘法可记为:F=AX

其中

$$F=AXF=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\\vdots\\F_n\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

主成分 F=AX 的协差阵为：

$$Var\ (F)=Var\ (AX)=(AX)\cdot(AX)^T=AXX^TA^T=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_p\end{pmatrix}$$

设原始数据的协方差阵为 $V=R=XX^T$，若能够满足条件③，最好要求 A 为正交矩阵，即：

$$AA^T=I$$

将原始数据的协方差代入主成分的协差阵公式得

$$Var(F)=AXX^TA^T=ARA^T=\Lambda$$

展开上式得：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{p1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{p2}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{1p}&a_{2p}&\cdots&a_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1p}\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{2p}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\r_{p1}&r_{p2}&\cdots&r_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{p1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{p2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1p}&a_{2p}&\cdots&a_{pp}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_p\end{pmatrix}$$

注意到 $V=R=XX^T$ 是一个实对称矩阵，由上面的等式，我们想到矩阵 A 可能是实对称矩阵的正交相似变换矩阵，对角矩阵 Λ 是其特征值所按降序排列之后生成的矩阵。

于是，根据实对称矩阵的性质可知，主成分分析中的主成分协方差应该是对角矩阵，其对角线上的元素恰好是原始数据相关矩阵的特征值，而主成分系数矩阵 A 的元素则是原始数据相关矩阵特征值相应的特征向量。于是，解释变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过变换后得到新的综合变量：

$$\begin{cases}F_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1p}x_p\\F_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2p}x_p\\\qquad\cdots\\F_p=a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pp}x_p\end{cases}$$

新的随机变量 $F_i$ 间是彼此正交的，且方差依次递减。

接下来，我们来看看主成分分析在综合评价方面的应用，表 1 是某市人民医院 1995 至 1997 年的医疗质量数据，采用主成分分析法对某市人民医院 1995 至 1997 年的医疗质量进行综合评价。

表 1 某市人民医院 1995 至 1997 年的医疗质量数据

| 年度 | 床位周转次数 | 床位周转率（%） | 平均住院日 | 出入院诊断符合率（%） | 手术前后诊断符合率（%） | 三日确诊率（%） | 治愈好转率（%） | 病死率（%） | 危重病人抢救成功率（%） | 院内感染率（%） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1995 | 20.97 | 113.81 | 18.73 | 99.42 | 99.80 | 97.28 | 96.08 | 2.57 | 94.53 | 4.60 |
| 1996 | 21.41 | 116.12 | 18.39 | 99.32 | 99.14 | 97.00 | 95.65 | 2.72 | 95.32 | 5.99 |
| 1997 | 19.13 | 102.85 | 17.44 | 99.49 | 99.11 | 96.20 | 96.50 | 2.02 | 96.22 | 4.79 |

利用主成分分析法可得第一主成分：

$$F_1=0.1656x_1+0.9710x_2+\cdots+0.0543x_4$$

第一主成分的贡献比为 98.25%，各年度第一主成分的得分分别为 3.0186，5.3068，-8.325，由此可知 1996 年的医疗质量最好。

**参考文献：**

[1]北京大学数学系前代数小组.王萼芳,石生明,修订,高等代数(第五版)[M].北京：高等教育出版社,2019:153-154

[2]安军,蒋娅.高等代数 [M].北京：北京大学出版社,2016:348-350

[3]丘维声.高等代数(下册) [M].北京：北京大学出版社,2016:198-199

[4]杨虎,刘琼荪,钟波.数理统计 [M].北京：高等教育出版社,2004:199-206

**作者简介：**

薛建明(1982 年-)，女，山东高唐人，硕士，副教授，研究方向：矩阵理论。

胡兴凯(1982 年-)，男，山东泰安人，博士，讲师，研究方向：算子不等式。