DOI:10.15907/j.cnki.23-1450.2010.06.029

文章编号：1008-8717（2010）06-0110-02

对称矩阵与反对称矩阵的若干性质

武 秀 美
（菏泽学院数学系，山东 菏泽 274000）

摘 要：在高等代数中矩阵是研究问题的重要工具，对称矩阵与反对称矩阵作为特殊矩阵无论在理论方面，还是在实际应用方面都有很重要的意义．在研究矩阵及学习有关数学知识时，经常要讨论这两种特殊矩阵的性质及应用．任何一个矩阵都可以唯一地分解成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和．对称矩阵与反对称矩阵既有类似的性质，也有各自特有的性质和应用．

关键词：对称矩阵；反对称矩阵；可逆对称矩阵；可逆反对称矩阵

中图分类号：O181 **文献标识码：**A

一、对称矩阵与反对称矩阵的类比性质

性质 1.1 对称矩阵的转置矩阵仍是对称矩阵；反对称矩阵的转置矩阵仍是反对称矩阵.

性质 1.2 对称矩阵与反对称矩阵对于和、差、数乘运算都是封闭的.

性质 1.3 两个对称（反对称）矩阵的乘积不一定是对称（反对称）矩阵.

性质 1.4 1）若对称矩阵 A 可逆，则 A^{-1} 也对称；2)若反对称矩阵 A 可逆，则 A^{-1} 也是反对称矩阵.

证明 1）设 A 为对称的可逆矩阵，则

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$$

2）设 A 为反对称矩阵，则

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$$

性质 1.5 1）若对称矩阵 A 可逆，则 A 的伴随矩阵 A^* 也对称；2）若奇数阶反对称矩阵 A 可逆，则 A 的伴随矩阵 A^* 也对称；若偶数阶反对称矩阵 A 可逆，则 A 的伴随矩阵 A^* 也反对称.

性质 1.6 若 A 对称（反对称），则它的合同矩阵也对称（反对称）.

证明 设矩阵 A 对称，A 与 B 合同，则存在可逆矩阵 P，使

$$B=P^TAP$$

故

$$B^T=(P^TAP)^T=P^TA^TP=B$$

性质 1.7 若 A、B 为对称矩阵，则 1）$AB+BA$ 为对称矩阵，2）$AB-BA$ 为反对称矩阵.

性质 1.8

1）A，B 同为对称或反对称矩阵，则 AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$；

2）若 A 为对称矩阵且 B 为反对称矩阵，则 AB 为反对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

性质 1.9 若 A 为任意方阵，1）$A+A^T$、AA^T 为对称矩阵；

2）$A-A^T$ 为反对称矩阵.

性质 1.10 $P^{n\times n}$ 中 1)全体对称矩阵作成的数域 P 上的空间的维数为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维的.

2）全体反对称矩阵作成的数域 P 上的空间的维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维的.

性质 1.11 1）对称矩阵的特征值都是实数；

2）反对称矩阵的特征值都是 0 或纯虚数.

二、对称矩阵的特有性质

性质 2.1 设 A 为 n 阶对称矩阵，则 A^k（k=1，2，…）也是对称矩阵.

性质 2.2 在数域 P 上，任意一个对称矩阵都合同于一对角矩阵.

性质 2.3 设 A 为 n 阶实对称矩阵，λ_r 是 A 的 r 重特征值，则秩 $(\lambda_rE-A)=n-r$，从而特征值 λ_r 恰好对应 r 个线性无关的特征向量.

性质 2.4 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有 n 阶正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角阵.

性质 2.5 如果实矩阵 A 正交相似于对角矩阵 D，则 A 一定是实对称矩阵.

收稿日期：2009-11-26
作者简介：武秀美（1979—），女，山东菏泽人，菏泽学院数学系助教，硕士，研究方向：代数几何。

性质 2.6 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 A^TA 是 n 阶对称矩阵；AA^T 是 m 阶对称矩阵.

性质 2.7 设 A，B 都是 n 阶实对称矩阵，则 A 与 B 正交相似的充分必要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

性质 2.8 n 阶实对称矩阵 A 正定与下列条件等价：

1）A 与单位矩阵 E 合同.

2）存在 n 阶实可逆矩阵 C，使得 $A=C^TC$.

3）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A 的顺序主子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0，\quad (k=1,2,\dots,n)$$

4）A 的特征值都大于零.

三、反对称矩阵的特有性质

性质 3.1 不存在奇数级的可逆反对称矩阵.

性质 3.2 反对称矩阵的主对角元素全为零.

性质 3.3 反对称矩阵的秩为偶数.

性质 3.4 反对称矩阵的行列式为非负实数.

性质 3.5 设 A 为反对称矩阵，则 $A+E$ 可逆（否则，-1 为 A 的特征值，出现矛盾）.

性质 3.6 设 A 为反对称矩阵，则 A 合同于矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

性质 3.7 反对称矩阵 A 的特征值为零的充要条件为 $A=0$.

性质 3.8 设 λ 是实反对称矩阵 A 的特征值，则 $-\lambda$ 也是 A 的特征值.

参考文献：

[1]王萼芳,石生明.高等代数（第三版）[M].北京：高等教育出版社，2003.

[2]程云鹏,张凯院,徐仲.矩阵论[M].西安：西北工业大学出版社.

[3]陈殿友,术洪亮.线性代数[M].P151.

[4]徐仲,陆全,张凯院等.高等代数三导丛书[M].北大第三版，西安：西北工业大学出版社，2006:292.

[5]徐仲,陆全,张凯院.高等代数考研教案[M].西安：西北工业大学出版社，2006:248.

[6]王庆成,王晓易.线性代数学习辅导[M].科学技术文献出版社，P44.

[7]孙芬兰,陈一巾.线性代数[M].杭州：浙江大学出版社，1993:73.

[8]杨奇,田代军,韩维信.线性代数与解析几何[M].天津：天津大学出版社，2002:134.

[9]杨奇,孟道骥.线性代数教程[M].天津：南开大学出版社，2004:92.

[10]钱椿林.线性代数（第 3 版）[M].北京：电子工业出版社，2005:63.

（上接 109 页）

Effective Clustering Methods for Spatial Data Mining. Proceedings of the 20th VLDB Conference, Santiago, Chile, 1994:144-155.

[5]S. Guha, R. Rastogi, K. Shim. CURE: An Efficient Clustering Algorithm for Large Database. ACM SIGMOD, 1998:73-84.

[6]S. Guha, R. Rastogi, K. Shim. ROCK: A Robust Clustering Algorithm for Categorical Attribustes. Information Systems, 2000,25(5):345-366.

[7]T. Zhang, R. Ramakrishnan, M. Linvy. BIRCH: An Efficient Data Clustering Method for Very Large Databases. Proceedings of ACM SIGMOD International Conference On Management of Data, Acm press,1996: 103-114.

[8]R. Agrawal, J. Gehrke, D. Gunopolos, P. Raghavan. Automatic Subspace Clustering of High Dimensional Data for Data Mining Application. Proceedings of ACM SIGMOD International Conference On Management of Data,1998:94-105.

[9]G. Sheikholeslami, S. Chatterjee, and A. Zhang. WaveCluster: A Multi-Resolution Clustering Approach for Very Large Spatial Databases. Proceedings of the 24th VLDB, New York, 1998:428-439.

[10]A. Hinneburg, D. A. Keim. An Efficient Approach to Clustering in Large Multimedia Databases with Noise. Proceedings of 4th International Conference On Knowledge Discovery and Data Mining, AAAI Press, 1998:58-65.