文章编号: 1004— 4280(2007)02— 0092— 03

对称矩阵和反对称矩阵的若干性质

邹本强

(威海职业学院, 山东 威海 264200)

摘要: 在高等代数中矩阵是研究问题很重要的工具, 在讨论矩阵转置时给出了对称矩阵和反对称矩阵的定义, 但对它们的性质研究很少。对称矩阵和反对称矩阵作为特殊矩阵无论在矩阵理论方面, 还是在实际应用方面都有重要的意义。我们在研究矩阵及学习有关数学知识时, 经常要讨论这两种特殊矩阵的性质。本文先给出对称矩阵和反对称矩阵的定义, 然后讨论了它们的若干性质。

关键词: 对称矩阵; 反对称矩阵; 性质

中图分类号: O151. 21 文献标识码: A

Various properties of symmetric matrix and anti-symmetric matrix

ZOU Ben-qiang

(Weihai Vocational College, Weihai 264200, China)

Abstract: Matrix serves as a key tool in the study of Advanced Algebra. However in studying the transpose of matrix much focus has been given on the definition of symmetric matrix and anti-symmetric matrix while their properties have not been fully explored. As special forms of matrixes, symmetric and anti-symmetric matrix plays a key role not only in the theory of matrix but also in actual application. Properties of the two forms of special matrixes are frequently used and discussed in the study of matrix and related mathematical knowledge. This paper first presents the definition of symmetric matrix and anti-symmetric matrix and then moves on the disscussion of certain properties of them.

Key words: symmetric matrix; anti-symmetric matrix; properties

我们知道, 任何一个方阵都可以唯一地分解为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和。因此, 我们将对称矩阵与反对称矩阵对照起来讨论它们的性质, 以供读者学习矩阵时提供参考。

定义 1 若 $A^{T}=A$, 称矩阵 A 为对称矩阵; 若 $A^{T}=-A$, 称矩阵 A 为反对称矩阵。

性质 1 1)对称矩阵的转置矩阵是对称矩阵; 2)反对称矩阵的转置矩阵是反对称矩阵。

证明略。

性质 2 1)对称矩阵的和、差、数乘都是对称矩阵; 2)反对称矩阵的和、差、数乘都是反对称矩阵。

证明 我们仅就 2)做出证明。

设 A、B 都是反对称矩阵, k 为任意数, 则 $A^{T}=-A$, $B^{T}=-B$, 因此,

$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}=-A-B=-(A+B)$,

$(A-B)^{T}=A^{T}-B^{T}=-A+B=-(A-B)$,

$(kA)^{T}=kA^{T}=-kA$

性质 3 1)若对称矩阵 A 可逆, 则 A^{-1} 也对称; 2)若反对称矩阵 A 可逆, 则 A^{-1} 也反对称。

证明 1)设 A 为对称的可逆矩阵, 则 $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}=A^{-1}$。

2)设 A 为反对称的可逆矩阵, 则 $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$。

性质 4 1)若对称矩阵 A 可逆, 则 A 的伴随矩

收稿日期: 2006—10—13

作者简介: 邹本强(1965—), 男, 山东省威海市人, 威海职业学院副教授, 学士, 主要从事高职教育与数学方面的研究.

阵 A^* 也对称; 2)若奇数阶反对称矩阵 A 可逆, 则 A 的伴随矩阵 A^* 对称; 若偶数阶反对称矩阵 A 可逆, 则 A 的伴随矩阵 A^* 反对称。

证明 1)设 A 为 n 阶可逆的对称矩阵($n\geqslant 2$), 则$(A^*)^T=(A^T)^*=A^*$。

2)设 A 为 n 阶可逆的反对称矩阵($n\geqslant 2$), 则 $(A^*)^T=(A^T)^*=(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$。

若 n 为奇数, 则 $(A^*)^T=A^*$; 若 n 为偶数, 则 $(A^*)^T=-A^*$。

性质 5 1)若矩阵 A 对称, 则它的合同矩阵也对称; 2) 若矩阵 A 反对称, 则它的合同矩阵也反对称。

证明 1)设矩阵 A 对称, B 与 A 合同, 则存在可逆矩阵 P, 使 $B=P^TAP$, 故 $B^T=(P^TAP)^T=P^TA^TP=P^TAP=B$。

2)设矩阵 A 反对称, B 与 A 合同, 则存在可逆矩阵 P, 使 $B=P^TAP$, 故 $B^T=(P^TAP)^T=P^TA^TP=P^T(-A)P=-P^TAP=-B$。

性质6 若 A、B 为对称矩阵, 则 1)$AB+BA$ 为对称矩阵; 2)$AB-BA$ 为反对称矩阵。

证明 1)$(AB+BA)^T=(AB)^T+(BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=BA+AB=AB+BA$;

2)$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=BA-AB=-(AB-BA)$

性质 7 1)若 A、B 为对称矩阵, 则 AB 为对称矩阵当且仅当 $AB=BA$; 2)若 A、B 为反对称矩阵, 则 AB 为对称矩阵当且仅当 $AB=BA$; 3)若 A 为对称矩阵且 B 为反对称矩阵, 则 AB 为反对称矩阵当且仅当 $AB=BA$。

证明 1)若 A、B 为对称矩阵, 当 $AB=BA$ 时, 则$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$; 当$(AB)^T=AB$ 时, 则 $AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$。

2)若 A、B 为反对称矩阵, 当 $AB=BA$ 时, 则 $(AB)^T=B^TA^T=(-B)(-A)=AB$; 当$(AB)^T=AB$ 时, 则 $AB=(AB)^T=B^TA^T=(-B)(-A)=BA$。

3)若 A 为对称矩阵且 B 为反对称矩阵, 当 $AB=BA$时, 则$(AB)^T=B^TA^T=(-B)A=-AB$; 当$(AB)^T=-AB$ 时, 则 $AB=-(AB)^T=-B^TA^T=-(-B)A=BA$

性质8 设$|A|\neq 0$, 1)若 A^* 为对称矩阵, 则 A^{-1}也为对称矩阵; 2)若 A^* 为反对称矩阵, 则 A^{-1} 也为反对称矩阵。

证明 设$|A|\neq 0$, 则 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

1)若 A^* 为对称矩阵, 则

$$(A^{-1})^T=(\frac{A^*}{|A|})^T=\frac{A^*}{|A|}=A^{-1};$$

2)若 A^*为反对称矩阵, 则

$$(A^{-1})^T=(\frac{A^*}{|A|})^T=\frac{-A^*}{|A|}=-A^{-1}。$$

性质 9 设$|A|\neq 0$, 1)若 A^*为对称矩阵, 则 A^T 也为对称矩阵; 2)若 A^* 反对称矩阵, 则 A^T 也为反对称矩阵。

证明 设$|A|\neq 0$, 则 A^*可逆, 由 $AA^*=|A|E$, 知 $A=|A|(A^*)^{-1}$,

1)$A^T=|A|[(A^*)^{-1}]^T=|A|[(A^*)^T]^{-1}$
$=|A|(A^*)^{-1}=A$;

2)$A^T=|A|[(A^*)^{-1}]^T=|A|[(A^*)^T]^{-1}$
$=|A|(-A^*)^{-1}=-A$

性质 10 若 A 为任意方阵, 1)则 $A+A^T$、AA^T 为对称矩阵; 2)则 $A-A^T$ 为反对称矩阵。

证明 1)$(A+A^T)^T=A^T+A=A+A^T$, $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$;

2)$(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$。

性质 11 1)实对称矩阵的特征值都是实数; 2)反对称实矩阵的特征值都是 0 或纯虚数。

证明 1)设 λ 是实对称矩阵 A 的任一特征值, α 是它所对应的特征向量,

则 $A\alpha=\lambda\alpha$, 又 $\overline{A}=A$, 则 $\overline{A\alpha}=\overline{A\alpha}=A\,\overline{\alpha}=\overline{\lambda\alpha}$, $\overline{\alpha}^TA\alpha=\overline{\alpha}(A\alpha)=\overline{\alpha}^T(A^T\alpha)=(A\,\overline{\alpha})^T\alpha=(\overline{\lambda\alpha})^T\alpha=\overline{\lambda\alpha}^T\alpha$, $\overline{\alpha}^TA\alpha=\overline{\alpha}^T(A\alpha)=\overline{\alpha}^T(\lambda\alpha)=\lambda\,\overline{\alpha}^T\alpha$, 所以, $\overline{\lambda\alpha}^T\alpha=\lambda\,\overline{\alpha}^T\alpha$, 即$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\alpha}^T\alpha=0$, 由于 $\alpha\neq 0$, 所以 $\overline{\alpha}^T\alpha>0$, 故 $\lambda=\overline{\lambda}$, 因此, λ 为实数。

2)同理可证, $\lambda+\overline{\lambda}=0$, 因此, λ 为 0 或纯虚数。

性质 12 1)设 A 为实对称矩阵, 则属于不同特征值的特征向量必正交; 2)设 A 为反对称实矩阵, 则属于不互为相反特征值的特征向量必正交。

证明 1)略。

2)设 λ_1、λ_2 是反对称实矩阵的两个不互为相反数的特征值, α_1、α_2 是分别属于 λ_1、λ_2 的特征向量, 因此, $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$, 在 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$ 两端分别取其转置, 得 $\alpha_1^TA^T=-\alpha_1^TA=\lambda_1\alpha_1^T$, 在$-\alpha_1^TA=\lambda_1\alpha_1^T$ 两端分别右乘 α_2, 得$-\alpha_1^TA\alpha_2=\lambda_1\alpha_1^T\alpha_2=-\lambda_2\alpha_1^T\alpha_2$, 因此, $(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_1^T\alpha_2=0$, 又 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$, 故 $\alpha_1^T\alpha_2=0$。

性质 13 奇数阶反对称矩阵的行列式为 0。

证明 设 A 为 n 阶反对称矩阵(n 为奇数), 则 $A^T=-A$, 所以, $|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$, 又$|A^T|=|A|$, 所以, $|A|=|-A|$, 故$|A|=0$。

参考文献:

[1] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1984.
[2] 廖家藩. 高等代数[M]. 北京: 电子科技大学出版社, 1995.
[3] 毛纲源. 线性代数解题方法技巧归纳[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1995.
[4] 钱椿林. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[5] 薛有才, 林春艳. 高等代数研讨[M]. 北京: 知识出版社, 1996.

(上接第89页)

对于臭源物质为H_2S、NH_3等无机小分子的臭气,其去除采用氧化法较为适应,而对于臭源物质是烃、醇、酚、酯等有机物的臭气,其去除采用催化氧化或生物法较为合适。另外,可以将吸附法与化学法或生物法结合起来,首先将臭源物质吸附于吸附剂表面,再利用催化氧化使其分解或利于微生物作用使其转化为无害物质。

在化学法除臭方面,除臭氧和高铁酸盐之外的廉价氧化剂应继续开发和利用,光催化氧化方法中的廉价光催化剂有待开发。在物化除臭法中,吸附剂改性有利于除臭效率的提高,同时,由于吸附剂再生要消耗能量,则原料来源广、廉价且高吸附量的吸附剂将在除臭市场有较强的竞争力。在生物除臭法中,首先应该考虑臭源物质的生物去除可能性和去除效率,其次要做好微生物的驯化工作,以提高除臭效率。

目前生物除臭技术代表着最先进的除臭方法。加强对这方面的研究,并应用到实际的臭气治理中去,具有很强的现实意义。

参考文献:

[1] 金至清. 恶臭的分析方法及治理技术[J]. 上海环境科学, 1997, 16(5): 40－43.
[2] 纪树满. 恶臭污染的防治[J]. 重庆环境科学, 1999, 21(2): 27－29.
[3] 孙彤, 徐彪. 除臭方法及展望[J]. 辽宁工学院学报, 2003, 23(6): 44－46.
[4] 张文钲, 张羽天. 除臭技术与除臭剂[J]. 化工新型材料, 1998, 26(10): 25－27.
[5] 王宁, 周玉若. 抗菌除臭活性碳纤维的研制及其性能[J]. 现代地质, 1998(4): 521.
[6] 付钟, 何品晶, 李国建. 恶臭的治理方法－生物脱臭法[J]. 环境卫生工程, 1997(1): 3－7.
[7] 尚魏, 王启山, 郭静. 生物过滤除臭技术在城市污水处理厂中的应用[J]. 天津城市建设学院学报, 2001, 7(2): 121－124.