文章编号:1003-6180(2018)01-0072-02

对称矩阵教与学

王宏兴[1],武玲玲[2]

(1.广西民族大学 理学院,广西 南宁 530006;2.贵州工程应用技术学院 理学院,贵州 毕节 551700.)

摘　要:简要分析和说明若干对称矩阵的结论,对部分特殊对称矩阵的性质、背景及其应用做介绍.

关键词:对称矩阵;特殊矩阵;矩阵分解

[中图分类号]O151　　[文献标志码]A

Teaching and Learning on Symmetric Matrix

WANG Hong-xing[1], WU Ling-ling[2]

(1. School of Science, Guangxi University for Nationalities Nanning, 530006, China
2. College of Science, Guizhou university of engineering science, Bijie 551700, China)

Abstract: It presents a brief analysis and explanation of conclusions of symmetrical matrices, and introduces the properties, background and applications of some special ones.

Key words: symmetric matrix; special matrix; matrix decomposition

对称矩阵的若干性质及其应用是重要知识点,对称矩阵的相关问题也是矩阵论研究中的热点.本文主要介绍对称矩阵在统计学、控制论、数值代数等领域的应用,给授课教师提供帮助,让学生了解对称矩阵的重要作用,增强其学习兴趣.

1　对称矩阵的若干结论

记A^T为A的转置矩阵.如果A是n阶方阵且$A=A^T$,则称A为对称矩阵.记A^H为A共轭转置矩阵.如果$A=A^H$,称A为自共轭矩阵,是对称矩阵的推广.

结论1　设A是实数域上对称矩阵,则存在正交矩阵T和对角矩阵$\sum$使得

$$A=T\sum T^T.$$

如果矩阵A是在复数域的Hermitian矩阵,则存在酉矩阵U和对角矩阵$\sum$使得

$$A=U\sum U^H.$$

这个分解简洁、优美,但是内容丰富,细致地刻画了对称矩阵的内在特性.该分解在对称矩阵问题的研究中有着广泛的应用.矩阵分解在矩阵研究中非常重要,合适的矩阵分解能够简化复杂的问题.常用的矩阵分解有奇异值分解、QR分解、Jordan分解、满秩分解等.教师在讲授高等代数选讲和矩阵论选讲等课程时,应对矩阵分解及其应用给予更多的关注,帮助学生应用合适的矩阵分解处理线性代数中关于矩阵的问题.

结论2　对任意的实矩阵A,AA^T和A^TA是对称的.

(1)如果A是方阵且$AA^T=A^TA$,称A是正

收稿日期:2017-12-05
基金项目:国家自然科学基金项目(11401243)
作者简介:王宏兴(1981-),男,安徽利辛人.副教授,博士,主要从事矩阵理论及应用研究;武玲玲(1982-),女,山西大同人.讲师,硕士,主要从事矩阵研究.

规矩阵. 对称矩阵是正规矩阵.

(2) 矩阵广义逆是一般逆的推广，被广泛的应用在数值代数等学科中. 对任意的实矩阵 A，存在唯一的 X 满足

$$AXA = A, \qquad XAX = X,$$
$$(AX)^T = AX, \qquad (XA)^T = XA.$$

称 X 为 A 的广义逆，记为 A^T. 这里 AA^T 和 A^TA 都是对称的；如果 $AA^T = A^TA$，称 A 是 EP 矩阵. 对称矩阵和正规矩阵都是 EP 矩阵.

(3) 如果 A 是方阵，且 $AA^T = A^TA = E$，称 A 为正交矩阵. [1]

(4) 设 E 是单位矩阵，v 是单位向量，则 $H = E - 2vv^T$ 是对称矩阵. 显然 H 也是正交的、对合的，为豪斯霍尔德矩阵 (Householder matrix) 或初等反射矩阵.

Dubrulle 在文献[2]中应用 Householder 变换给出一个对于稀疏向量的数值稳定的算法.

结论 3 如果 A 是对称的，则对任意的 S 则 SAS^T 是对称；特别在 S 为可逆矩阵时，SAS^T 与 A 具有相同的惯性指数.

该结论被称为惯性指数定律，1852 年 J. J. Sylveste 证明该定律，1857 年雅可比重新发现了该结论. [3]

结论 4 任意的方阵 A 都可以分解为对称矩阵与反对称矩阵的和：

$$A = S(A) + C(A), S(A) = \frac{1}{2}(A + A^T),$$
$$C(A) = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

这个矩阵分解又被称为 Toeplitz 分解. 在文献[1]中可以查阅到关于该分解唯一性的证明.

2　若干特殊的对称矩阵

协方差矩阵　协方差是从标量随机变量到高维度随机向量的自然推广，用来衡量两个变量的总体误差. 协方差矩阵是一个矩阵，其每个元素是各个向量元素之间的协方差. 记两个随机变量 X，Y 的协方差为 $\mathrm{cov}(X,Y)$. 由协方差的定义，有 $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$.

拉普拉斯矩阵　矩阵在图论中有着广泛的应用[4]，拉普拉斯矩阵(Laplacian matrix)是图论研究中常用的矩阵之一，等于度对角矩阵减去邻接矩阵.

格拉姆矩阵　在线性代数中，格拉姆矩阵(Gramian matrix)是关于内积的对称矩阵，即内积空间中向量组 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的希尔伯特矩阵 G 的第 i 行第 j 列的元素是 $G_{ij} = (v_j, v_j)$. 其能够刻画向量组的线性相关性：一组向量线性无关当且仅当其格拉姆行列式不等于零. 此类矩阵在量子化学、控制论、协方差结构模型、有限元方法等方面都有应用. 在取向量为内积空间的基底的时候，称其为度量矩阵. [5]

汉克尔矩阵　汉克尔矩阵(Hankel Matrix)是指每一条副对角线上的元素都相等的方阵，此类矩阵的行列式在各类习题中经常出现.

$$H_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

希尔伯特矩阵　希尔伯特矩阵(Hilbert matrix)是由研究一类多项式的最佳平方逼近问题引出的，是一种系数都是单位分数的方阵，即希尔伯特矩阵 H 的第 i 行第 j 列的元素是 $\frac{1}{i+j-1}$，希尔伯特矩阵是正定的，高度病态且病态程度和阶数相关. 有趣的是，希尔伯特矩阵的逆矩阵的系数都是整数.

3　小结

对称矩阵是矩阵论的重要组成部分，在本科生高等代数课程中，是重要的知识点之一. 本文列举了若干对称矩阵的结论，介绍了若干特殊矩阵及其应用，希望本文能够给授课教师提供帮助，并向学生传递对称矩阵理论的重要性.

参考文献

[1] Zhang F. Matrix theory: basic results and techniques[M]. Springer Science & Business Media, 2011. 171-181.
[2] Dubrulle A A. Householder Transformations Revisited[J]. SIAM Joural on matrix analysis and applications, 2000, 22(1): 33-40.
[3] 包芳勋，董可荣. 西尔维斯特及其矩阵理论[J]. 自然科学史研究，2008, 27(2): 227-235.
[4] 杨雅琴，李立. 不完全图同构的分类分层变换法[J]. 牡丹江师范学院学报：自然科学版，2013(1): 4-5.
[5] 张伟，曹重光. 域上保对称矩阵空间上群逆的线性映射[J]. 牡丹江师范学院学报：自然科学版，2006(1): 10-11.

编辑：吴楠