第 22 卷第 1 期
2006 年 2 月
河北北方学院学报（自然科学版）
Journal of Hebei North University (Natural Science Edition)
Vol. 22 No. 1
Feb. 2006

对称矩阵的一些性质和定理

韩振芳[1]，张　青[2]
（1. 河北北方学院数学系，河北 张家口 075000；2. 秦皇岛职业技术学院基础部，河北 秦皇岛 066100）

摘要：讨论了有关对称矩阵的一些性质和定理，为以后研究对称矩阵的相关理论，提供了方便的途径.

关键词：矩阵；对称矩阵；反对称矩阵
中图分类号：O 151.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-1492（2006）01-0017-03

About some Characters of Symmetrical Matrix

HAN Zhen-fang[1]，ZHANG Qing[2]
（1. Department of Mathematics，Hebei North University，Zhangjiakou，Hebei 075028，China；
2. Department of Basic Course，Qinhuangdao Institute of Technology，Qinhuangdao，Hebei 066100，China）

Abstract：Some characters of symmetrical matrix and the important conclusions are discussed and several convenient ways to the relevant studies of symmetrical matrix theories are offered.

Key words：matrix；symmetrical matrix；antisymmetrical matrix

定义[1]：如果矩阵 $A^T=A$，则称 A 为对称矩阵.

1　对称矩阵的性质

对于对称矩阵，在文献［1］和［2］中，关注更多的是对称矩阵的特征值和特征值所对应的特征向量，下面对于对称矩阵研究它的性质.

性质 1. 设 A 为 n 阶对称矩阵，则 A^k（$k=1，2，\cdots$）为对称矩阵.

证明：$(A^k)^T=(\underbrace{AA\cdots A}_{k个})^T=(A^T)^k=A^k$. 由定义得证.

性质 2. 设 A 为 n 阶方阵，则 $A+A^T$，AA^T，A^TA 是对称矩阵，从而 $(A+A^T)^k$，(AA^T) k，$(A^TA)^k$（$k=1，2，\cdots$）是对称矩阵.

证明：$(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$，所以 $A+A^T$ 是对称矩阵.

$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$，所以 AA^T 是对称矩阵.

$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$. 所以 A^TA 是对称矩阵 .

由性质 1 知，$(A+A^T)^k$，$(AA^T)^k$，$(A^TA)^k$（$k=1，2，\cdots$）是对称矩阵.

性质 3. 设 A 为 n 阶对称矩阵，若 A 可逆，则 A^{-1} 是对称矩阵，从而 $(A^{-1})^k$（$k=1，2\cdots$）也是对称矩阵.

证明：A 可逆，$A^T=A$，$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$

$\therefore A^{-1}$ 是对称矩阵. 而 $(A^{-1})^k=A^{-k}$，因此

$$(A^{-k})^T=(\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k个})^T=[(A^{-1})^T]^k=(A^{-1})^k=A^{-k}.$$

$(A^{-1})^k$（$k=1，2\cdots$）是对称矩阵，也可由性质 1 直接得到.

收稿日期：2006-01-18
作者简介：韩振芳（1970-），女，河北万全人，河北北方学院数学系讲师，硕士.

性质 4. 设 A 为 n 阶对称矩阵，则 A 可表示为对称矩阵和反对称矩阵的和.

证明： 设 $H=\frac{1}{2}(A+A^T)$，$S=\frac{1}{2}(A-A^T)$，易证 H 和 S 分别是对称矩阵和反对称矩阵，且 $A=H+S$.

性质 5. 设 A 为对称矩阵，X 与 A 是同阶矩阵时，X^TAX 是对称矩阵，从而（$X^TAX)^k$ 是对称矩阵.

证明：（X^TAX^T）$=X^TA^T$（$X^T)^T=X^TA^TX=X^TAX$，所以 X^TAX 是对称矩阵.

由性质 1 知，$(X^TAX)^k$是对称矩阵.

性质 6. 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A^2=I$，$AA^T=I$，则 A 是对称矩阵.

证明： $\because A=AI=AAA^T=IA^T=A^T$，$\therefore A$ 是对称矩阵.

性质 7. 设 A，B 为 n 阶对称矩阵，则 $(AB+BA)^k$（$k=1$，2，…）也是对称矩阵.

证明： 先证 $k=1$ 时成立.

因为 A，B 是对称矩阵，即 $A^T=A$，$B^T=B$，且 $(AB+BA)^T=(AB)^T+(BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=BA+AB=AB+BA$.

由性质 1 知，结论对 $k=1$，2，…都成立.

性质 8. 设 A,B 为 n 阶矩阵,且 A 为对称矩阵,$B^{-1}=B^T$,则$(B^{-1}AB)^k(k=1,2,\cdots)$是对称矩阵.

证明： $\because$ $A^T=A$，且 $B^{-1}=B^T$，所以

$[(B^{-1}AB)^k]^T=(B^{-1}A^kB)^T=B^T(A^k)^T(B^{-1})^T=B^{-1}(A^k)^T(B^T)^T=B^{-1}(A^k)^TB$

A 为 n 阶对称矩阵，由性质知：$(A^k)^T=A^k$，因此 $[(B^{-1}AB)^k]^T=B^{-1}A^kB=(B^{-1}AB)^k$. 证毕

性质 9. (1) 设 A，B 为 n 阶对称矩阵，则 AB（或 BA）是对称矩阵的充分必要条件 $AB=BA$，从而 $AB=BA$ 时，$(AB)^k$（$k=1$，2…）（或 $(BA)^k$）是对称矩阵.

(2) A 为对称矩阵，B 为与 A 同阶的任意矩阵，则 $AB^T=B^TA$ 的充分必要条件是 $AB=BA$.

证明： ① 必要性　$\because A^T=A$. $B^T=B$　且 $AB=BA$，

$\therefore$. $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$.

②充分性 $\because A^T=A$　$B^T=B$　且 $(AB)^T=AB$，

$\therefore AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$.

由性质 1 知，$AB=BA$ 时，$(AB)^k$（$k=1$，2…）（或 $(BA)^k$）是对称矩阵. 证毕

③必要性　对 $AB=BA$ 两边同时转置：$B^TA^T=A^TB^T$.

A 对称 $A^T=A$，所以 $AB^T=B^TA$.

充分性类似可证.

2　有关对称矩阵的几个定理

上面研究了对称矩阵的性质，关于对称矩阵还有下面的定理.

定理 1. 设列矩阵 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

①若 X 满足 $X_TX=1$，令 $H=E-2XX^T$，则 H 为对称矩阵，且 $H^2=E$.

②设 A 为 n 阶对称矩阵，且 $X^TAX=0$，则 $A=0$.

证① 因为 $H^T=(E-2XX^T)^T=E^T-2(XX^T)^T=E-2(X^T)^TX^T=E-2XX^T=H$，所以 H 为对称矩阵.

$$H^2=(E-2XX^T)^2=E-4XX^T+4(XX^T)(XX^T)$$
$$=E-4XX^T+4X(X^TX)X^T=E-4XX^T+4XX^T=E.$$

②设 $A=(a_{ij})$，因为对任意 $X_{n\times1}$有 $X^TAX=0$，即

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}=0$$

$$a_{11}x_1{}^2+(a_{21}+a_{12})x_1x_2+\cdots+(a_{1n}+a_{n1})x_1x_n+a_{22}x_2{}^2+(a_{23}+a_{32})x_2x_3$$
$$+\cdots+(a_{2n}+a_{n2})x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n{}^2=0$$

上式是一个多元的零多项式，故

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$$
$$a_{12}+a_{21}=0,\ \cdots,\ a_{1n}+a_{n1}=0,\ \cdots\cdots,\ a_{23}+a_{32}=0,\ \cdots$$

即 $a_{ij}=-a_{ji}$，所以 A 为反对称矩阵，从而 $A^T=-A$.

又 A 为对称矩阵 $A^T=A$，所以 $A=-A$，即 $A=0$.

定理 2. n 阶对称矩阵的全体对于矩阵的加法构成一个加群.

证明　设 A，B 为两个 n 阶对称矩阵，则

$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，所以 $A+B$ 是对称矩阵. 即加法运算是封闭的.

O 矩阵是对称矩阵，是单位矩阵.

$A+(-A)=0$，易知 $-A$ 也是对称矩阵. 即 $-A$ 是 A 的逆矩阵.

而矩阵的加法是满足结合律的.

加群的条件都符合，得证

定理 3. 对任意对称矩阵 A，B 若满足 $AB=BA$，则 n 阶可逆对称矩阵的全体对矩阵的乘法构成一个群.

证明　矩阵对乘法满足结合率，由性质 3 和性质 9 可知，结论正确.

参考文献：

[1]　张和瑞. 高等代数（第二版）[M]. 北京：高等教育出版社，1979. 287-220

[2]　同济大学数学系教研室. 线性代数 [M]. 北京：高等教育出版社，2002. 15-25

[责任编辑：刘守义]

（上接第 16 页）

由此得

$$\frac{9}{p}=2s-pr^2\quad(|p|\geqslant 5).$$

注意到$\frac{9}{p}$不是整数，而 $2s-pr^2$ 是一个整数，这就又出现了矛盾.

最后我们指出（通过例子 $f(x)=x^2+2x+5$ 也可以验证），对于判定一个整系数多项式在有理数域上不可约，定理 1 也只是一个充分条件而不是必要条件；定理 1 也具有与艾森施坦因判别法相同的局限性，即存在这样的整系数多项式 $f(x)$，它确实在有理数域上不可约，但对于任何整数 k，$f(x)$ 经代换 $x=y+k$ 后仍不能满足定理 1 的条件. 另外，即使把定理 1 与艾森施坦因判别法的条件联立也只是充分而不必要的判定条件.

参考文献：

[1]　[荷] B. L. 范德瓦尔登. 代数学 [M]（丁石孙等译）. 北京：科学出版社，1978. 110-111

[2]　张禾瑞，郝炳新. 高等代数（第四版）[M]. 北京：高等教育出版社，1997. 74-75

[3]　张群. 关于 Eiscnstein 判别法的一点注记 [J]. 数学通报，1984，48（10）：23

[责任编辑：刘守义]