DOI:10.19694/j.cnki.issn2095-2457.2013.17.070

对称矩阵的性质及应用

司凤娟
(菏泽学院 数学系,山东 菏泽 274015)

【摘　要】本文讨论了实对称矩阵的若干性质以及它们的应用。
【关键词】对称矩阵;性质;应用

1　对称矩阵的性质

定义 1 设 A 为 n 阶方阵,如果满足 $A^T=A$,即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,那么 A 称为对称矩阵,简称对称阵。对称阵的特点是:它的元素以对角线为对称轴对应相等。

规定:本文中的矩阵都为实矩阵。

性质 1 同阶对称矩阵的和、差、数乘运算得到的矩阵仍为对称矩阵。

性质 2 设 A 为 n 阶方阵,则 $A^TA,A+A^T,AA^T$ 为对称阵。

性质 3 设 A 为 n 阶对称阵,若 A 可逆,则 A^{-1},A^* 为对称阵。

证明:因为 A 为对称阵,所以 $A^T=A$,又因为 A 可逆,所以 $(A^T)^{-1}=A^{-1}$,$(A^{-1})^T=A^{-1}$,所以 A^{-1} 为对称阵。

因为 $A^*=|A|A^{-1}$,且 A 可逆,所以 $|A|\neq 0$,由性质 1 可知 A^* 为对称阵。

性质 4 实对称矩阵得特征值为实数。

性质 5 设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵 A 的两个特征值,p_1,p_2 是对应的特征向量。若 $\lambda_1\neq\lambda_2$,则 p_1 与 p_2 正交[1]。

证明:$\lambda_1p_1=Ap_1,\lambda_2p_2=Ap_2,\lambda_1\neq\lambda_2$。因 A 对称,故

$\lambda_1p_1^T=(\lambda_1p_1)^T=(Ap_1)^T=p_1^TA^T=p_1^TA$,

于是 $\lambda_1p_1^Tp_2=p_1^TAp_2=p_1^T\lambda_2p_2=\lambda_2p_1^Tp_2$,

即 $(\lambda_1-\lambda_2)p_1^Tp_2=0$,但 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故 $p_1^Tp_2=0$,即 p_1 与 p_2 正交。

性质 5 的推广 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p(p\geqslant 2)$ 是实对称矩阵 A 的 p 个特征值,$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是对应的特征向量,若 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\cdots\neq\lambda_p$,则 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 两两正交。

性质 6 设 A 为 n 阶实对称矩阵,λ 是 A 的特征方程的 r 重根,则矩阵 $A-\lambda E$ 的秩 $r(A-\lambda E)=n-r$,从而对应于特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量[2]。

性质 7 设 A 为 n 阶实对称矩阵,则必有正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵。

性质 8 设 A,B 为对称矩阵,存在正交矩阵 P 使 $P^TAP=B$ 的充分必要条件是 A,B 的特征值全部相同。

2　应用举例

例 1　设 A 为 n 阶方阵,则 A 可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和。

证明:$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$,因为 $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A+A^T$,所以 $A+A^T$ 为对称矩阵,$(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=-(A-A^T)$,因此 $A-A^T$ 为反对陈矩阵,所以 A 可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和。

例 2　设 A 为三阶实对称矩阵,特征值是 $1,-1,0$,而 $\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=-1$ 的特征向量分别是 $(a,2a-1,1)^T,(a,1,1-3a)^T$,求矩阵 A。

解:因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$,所以 $(a,2a-1,1)^T,(a,1,1-3a)^T$ 正交,因此 $a^2-a=0$,$a_1=0,a_2=1$,设对应特征值 0 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$。

当 $a_1=0$ 时,$\begin{cases}-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$,解线性方程组得 $(x_1,x_2,x_3)^T=(1,0,0)^T$。

对 $(0,-1,1)^T,(0,1,1)^T$ 单位化得 $(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^T,(0,1\sqrt{2},1/\sqrt{2})^T$,所以

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}。$$

同理可得,当 $a_1=1$ 时 $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&4\\1&1&4\\4&4&-2\end{pmatrix}$。

例 3　设 A,B 为对称矩阵,且 A 正定,证明 AB 的特征值是实数。

证明:设 $AB\xi=\lambda\xi$,其中 $\xi\neq 0$,因为 A 正定,则 A^{-1} 一定存在且正定,则有

$B\xi=\lambda A^{-1}\xi$,对等式进行共轭转置,得到 $\bar{\xi}^TB=\bar{\lambda}\bar{\xi}^TA^{-1}$,

那么 $\bar{\xi}^TB\xi=\lambda\bar{\xi}^TA^{-1}\xi,\bar{\xi}^TB\xi=\bar{\lambda}\bar{\xi}^TA^{-1}\xi$,

所以 $\lambda\bar{\xi}^TA^{-1}\xi=\bar{\lambda}\bar{\xi}^TA^{-1}\xi,(\bar{\lambda}-\lambda)\bar{\xi}^TA^{-1}\xi=0$,所以 $\bar{\lambda}=\lambda$。

【参考文献】

[1]同济大学数学系.工程数学线性代数[M].5 版.高等教育出版社,2007.
[2]张万琴,焦方蕾,等.线性代数[M].2 版.中国人民大学出版社,2007.

[责任编辑:汤静]

作者简介:司凤娟,菏泽学院数学系,硕士,助教。

(上接第 77 页)5　认知逻辑研究中存在的问题

认知逻辑研究的目的是为人工智能研究提供有力的工具。然而,目前认知逻辑的研究成果却远远没有达到这个目的,理论与实践、理想与现实之间的存在很大的差距。造成这种状况的原因是多方面的。

第一,当下,认知逻辑研究还停留于理论方面,缺少可操作性,理论向实践的转化尚有许多困难和很长一段路程。

第二,认知逻辑研究认知者对事实的知道、相信、断定、疑问等问题要以实验心理学的研究成果为基础,但是从目前世界范围来看,心理实验学研究是相当困难的领域。

第三,认知逻辑的研究涉及逻辑学、认知心理学、计算机科学等多个学科,要求研究人员在这些学科方面都有很深的造诣,而跨学科人才的培养与成长也是一个难题。

【参考文献】

[1]彭漪涟,马钦荣,主编.逻辑学大辞典[Z].上海:上海辞书出版社,2004:383.
[2]陈晓华.认知逻辑研究述评[J].哲学动态,2008(8):89.
[3]周昌乐.认知逻辑导论[M].北京:清华大学出版社,2001.
[4]李志才.方法论全书(17)[M].南京:南京大学出版社,1998:171.
[5]鞠实儿.论逻辑学的发展方向[J].中山大学学报:社会科学版,2003 年增刊:3-8.
[6]蔡曙山.认知科学背景下的逻辑学:认知逻辑的对象、方法、体系和意义[J].江海学刊,2004(6).
[7]李夏妍,张敏强.认知逻辑研究概观[J].首都师范大学学报:社会科学版,2005(5):119.

[责任编辑:杨扬]