非对称正定矩阵的性质

王世恒，郭道明

(南阳农业职业学院，河南 南阳 473000)

摘　要: 对称正定矩阵在实二次型的研究中有重要作用. 对于非对称矩阵，同样有正定的定义及相应的应用. 本文讨论非对称正定矩阵的性质，并举例说明.

关键词: 对称正定矩阵; 非对称正定矩阵; 特征值

中图分类号: O 151.21　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671 -6132(2016) 06 -0010 -02

0　引言

对称正定矩阵是定义在实数域上满足下式的所有对称矩阵 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0, \qquad (*)$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是任意非零向量，是实二次型性质研究的重要工具，在线性代数中有很重要的地位，在实际中有许多应用[1]. 那么非对称矩阵中是否也存在满足(*)式的矩阵呢? 答案是肯定的，为区别于对称正定矩阵，则称其为非对称正定矩阵或正定矩阵. 它们也有实际应用[2-3]，但对其研究并不多. 本文对非对称矩阵的性质进行研究，得到一些理论结果，并举例说明.

文中 $\mathbf{R}$ 表示实数域，$\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 和 $\boldsymbol{V}_n(\mathbf{R})$ 分别表示实数域上 n 阶方阵和 n 维列向量的全体(无特别说明，本文讨论的都是实矩阵)，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{*}$，$|\boldsymbol{A}|$ 和 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置、伴随、行列式与迹，i 为虚数单位.

1　定义与性质

定义 1[3] 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$，如果对任何 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \neq 0 \in \boldsymbol{V}_n(\mathbf{R})$，都有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵; 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵.

对于正定矩阵，有:

性质 1[3] 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素全大于零.

性质 2[3] 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 正定.

我们知道，对称正定矩阵的特征值全大于零，那么对于非对称正定矩阵是否也有该性质呢? 文献[4-5]中讨论的广义正定矩阵包含正定矩阵的如下性质(性质 3~6).

性质 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，若其特征值为实数，则该特征值大于 0.

例 1 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 正定，故 $\boldsymbol{A}$ 正定，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，$1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}$，实特征值大于 0.

反过来，若对称矩阵的特征值全大于零，则该矩阵正定. 那么对于非对称矩阵如何呢?

例 2 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，其特征值为 1 和 2，全大于 0; 而

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

的特征值为 $3 \pm \sqrt{10}$，不全为 0，故 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 非正定，所以 $\boldsymbol{A}$ 非正定.

于是，可以得到:

命题 1 非对称矩阵的特征值全大于 0，不能保证其正定.

反过来，则有:

命题 2 非对称正定矩阵的特征值不一定全大于 0，有可能为复数.

收稿日期: 2016 -04 -20
作者简介: 王世恒(1965—　)，河南南阳人，副教授，主要从事高等代数方面的研究.

例 3　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,其特征值为 $1\pm i$;而

$$A+A^{T}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

的特征值为 2 和 2,故 $A+A^{T}$ 正定,所以即使特征值不全大于 0,A 也正定. 例 1 也说明了这一点.

性质 4　若 A 正定,则 $|A|>0$.

性质 5　若 A 正定,则 A^{T} 正定.

性质 6　若 A 正定,则 A^{-1} 正定.

性质 3 ~ 6 可参见文献[4 - 5],已有相近说明,这里不再赘述.

性质 7　若 A 正定,则 $\mathrm{Tr}(A)>0$.

证明: 由性质 1 及矩阵的迹等于其所有对角线元素的和即得.

性质 8　若 A 正定,则 A^{*} 正定.

证明: 对任意非零向量 x,有

$$x^{T}A^{*}x=x^{T}(|A|A^{-1})x=|A|(x^{T}A^{-1}x),$$

由性质 4 和性质 7 知 $x^{T}A^{*}x>0$,因此 A^{*} 正定.

性质 9　若 A, B 正定,则 $kA+lB(k, l>0)$ 正定.

证明: 对任意非零向量 x,有

$$x^{T}(kA+lB)x=kx^{T}Ax+lx^{T}Bx>0,$$

所以 $kA+lB$ 正定.

性质 10　若 A 正定,则其所有顺序主子式都大于 0.

证明: 设 n 阶实方阵 A 正定,A_k 为其 k 阶顺序主子阵($k=1, 2, \cdots, n$),则对任意的非零向量 x_k 有

$$x_k^{T}A_kx_k=(x_k^{T},0^{T})^{T}A\begin{pmatrix}x_k\\ 0\end{pmatrix}>0,$$

即 A_k 正定,由性质 4,其 k 阶顺序主子式大于 0.

2　结语

综上所述,非对称正定矩阵与对称正定矩阵有许多相似的性质,但也有不同之处. 比如,对称正定矩阵的特征值全大于零,而非对称正定矩阵的特征值有可能为复数. 再如,由特征值判定正定性: 若特征值全大于零,则对称矩阵正定,故可用特征值判定其正定性; 而非对称矩阵特征值全大于零也不一定正定,因而无法根据特征值判定其正定与否. 还有,对称正定矩阵与单位矩阵合同,显然,非对称正定矩阵不能与单位矩阵合同,那么它与什么矩阵合同呢? 对于这些不同之处,还有待于进一步研究,以全面了解描述非对称矩阵的正定性.

参 考 文 献

[1]　黄云美. 正定矩阵的性质及其应用[J]. 烟台职业学院学报,2011,17(3):85 - 88.

[2]　漆文邦. 含非对称正定系数矩阵方程的解法研究[J]. 四川联合大学学报(工程科学版),1998,2(4):35 - 39.

[3]　王金金. 关于非对称矩阵正定的一个等价定理及其正定性的判定[J]. 西安电子科技大学学报,1988,15(4):61 - 65.

[4]　佟文廷. 广义正定矩阵[J]. 数学学报,1984, 27(6):801 - 810.

[5]　沈光星. 广义正定矩阵及其性质[J]. 高等学校计算数学学报,2002(2):186 - 192.

Properties of nonsymmetric positive definite matrices

WANG Shi-heng, GUO Dao-ming

(*Nanyang Vocational College of Agriculture*, *Nanyang* 473000, *China*)

Abstract: The symmetric positive definite matrices play an important role in the study of real quadratic forms. For nonsymmetric positive definite matrices, there is also positive definiteness and related applications. In this paper, the properties of nonsymmetric positive definite matrices are discussed with illustrative examples.

Key words: symmetric positive definite matrix; nonsymmetric positive definite matrix; eigenvalue